Cours de mathématiques

Enseignés en quatrième

Haereraii Metuarea

https://hmetuarea.github.io/

Collège de Afareaitu

Table des matières

Introduction

Pour commencer ce cours, vous collerez le tableau de vocabulaires qui suit.

Conjecture	Hypothèse.
Définition	Description d'un objet.
Axiome	Propriété admise sans démonstration.
Proposition	Propriété.
Lemme	Propriété restreinte à un cas particulier.
Théorème	Propriété très importante.
Corollaire	Conséquence d'une propriété.
Exemple	Cas particulier qui illustre une définition, une proposition, etc.
Preuve	Réduire une propriété de plus en plus simple jusqu'à ce qu'elle soit évidente.

Ceux-ci fondent les principes fondamentaux en mathématiques pour communiquer aisément cette année et les prochaines à venir.

Ce cours est construit en s'inspirant du modèle de la méthode Singapour [**?**]. Le but est d'inscrire chaque apprenant dans une démarche autonome tout en tenant compte de leur profile. Naturellement, cette méthode a des limites pour des profils d'élèves qui achèveront sans problème les notions à connaître. C'est pourquoi, une seconde édition de cours est entrain d'être mise en place sur ce même modèle en travaillant des notions qui vont au bord du programme du cycle 4. Aussi, rappelons que les notions inscrites ici correspondent aux attentes du ministère en les étoffant, du mieux que possible, sur le contexte polynésien [5]. Enfin, l'ordre des notions n'a été fait au soin de l'auteur : elle suit la progression des enseignants en mathématiques au collège d'Afareaitu.

Chapitre 1

Premier trimestre

Ce premier trimestre mêle la géométrie, l'algèbre et l'arithmétique. Les notions abordées dans ces thèmes seront utiles pour les trimestres qui suivront et enrichiront nos stratégies pour résoudre une diversité plus grande de problèmes.

1.1 Divisibilité

« Rodolphe fait le tour du monde en 80 jours. Le premier jour est un jeudi. Quel jour de la semaine arrivera-t-il ? »

Les problèmes de ce type sont difficilement résolubles quand le nombre de jours est très grand. La notion de divisibilité permet de répondre aux problèmes de ce type en faisant appel simplement aux tables de multiplication.

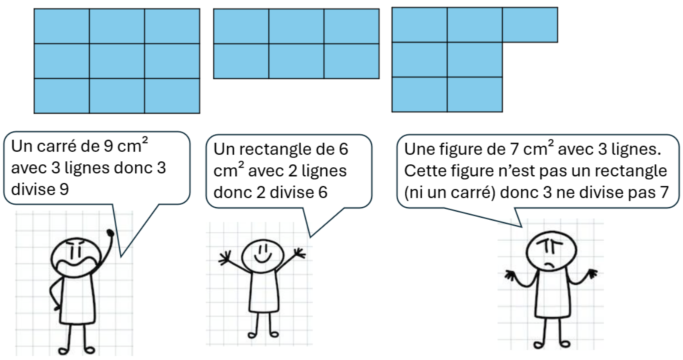
1.1.1 Diviseur et multiple

Commençons d'abord par introduire le vocabulaire adéquate sur la notion de diviseur et de multiple.

Objectif(s) d'enseignement. Connaître la définition de diviseur et multiple.

Pré-requis. Nombres entiers.

Apprentissage. Considérons un carré de 1 cm sur chaque côté. Uratini observe des figures et essaie de voir comment regrouper des carrés en bloque rectangulaire ou de carré.



Activité de recherche 1 (chercher, calculer, communiquer)**.** Uratini dispose de 150 briques pour faire sa maison.

1. Peut-il faire un mur de forme rectangulaire ? Si oui, de combien d'étages de brique ?
2. **Leçon.** Proposer une définition d'un diviseur.

Définition. Soient a, b deux entiers.
On dit que a divise b s'il existe un entier k tel que

$$b = a \times k$$

Si tel est le cas, on dit que b est un multiple de a.

Remarque. *Avec les mêmes notations de la définition, b est un multiple de a si, et seulement si, b est dans la table de multiplication de a. La connaissance de ses tables de multiplication est donc importante.*

Remarque. *De même, si a est un diviseur de b alors $a \leq b$.*

Ainsi, chercher les diviseurs d'un nombre revient à parcourir tous les nombres qui lui est inférieur et à les tester.

Exercice 1 (chercher, calculer, communiquer)**.** Dans une salle de classe, M. Uratini dispose de 35 chaises pour ses 35 élèves.

1. Trouver tous les diviseurs de 35.
2. Combien de rangées Uratini peut-il faire avec ces chaises ? Justifier.

Devoir 1 (calculer, raisonner, chercher, représenter)**.** Déterminer **tous** les diviseurs de 48.

Fin de la première séance.

Pour la suite, les notions de diviseurs et de multiples sont étroitement liées. C'est pourquoi vous devez impérativement connaître vos tables de multiplication.

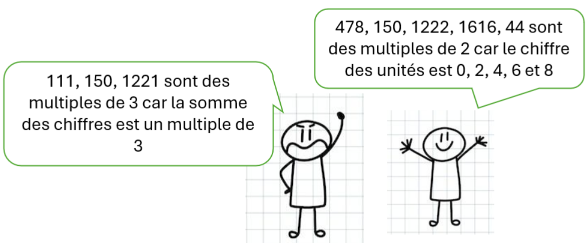
1.1.2 Critères de divisibilité

Rechercher les diviseurs en parcourant tous les nombres qui lui sont inférieurs et les tester est une manière qui va être difficile pour un nombre très grand ; pensez à un nombre allant du millier voire du milliard. Nous allons alors apprendre qu'il existe des techniques plus simples pour connaître certains diviseurs.

Objectif(s) d'enseignement. Connaître les critères de divisibilité de 2, 3, 5, 9 et 10. Savoir les appliquer.

Pré-requis. Nombres entiers. Multiples et diviseurs.

Apprentissage. Uratini et Varo ont trouvé des critères pour savoir si un nombre est dans la table de 2 et 3. Ils donnent quelques exemples en énonçant la règle qu'ils ont trouvé.



Trouver d'autres critères en s'inspirant de leur recherche.

Activité de recherche 2 (chercher, calculer, communiquer, raisonner)**.** Uratini a acheté un bateau et il réfléchi à la manière dont il va placer les chaises à bord pour ses touristes. Son bateau peut atteindre une capacité de 70 personnes.

1. Peut-il faire des rangées de 2 ? de 3 ?
2. Trouver un critère pour savoir si 70 est un multiple de 5. Pareil pour 9.
3. **Leçon.** Proposer et rédiger rigoureusement des critères de divisibilité de 2, 3, 5, 9 et 10.

Ainsi, il suffit simplement de regarder les chiffres que composent ces nombres. On énonce les règles.

Propriété. *On dit qu'un nombre est un multiple de 2 si le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 et 8.*

Propriété. *On dit qu'un nombre est un multiple de 3 si la somme des chiffres est un multiple de 3.*

Propriété. *On dit qu'un nombre est un multiple de 5 si le chiffre des unités est 0 et 5.*

Propriété. *On dit qu'un nombre est un multiple de 9 si la somme des chiffres est un multiple de 9.*

Propriété. *On dit qu'un nombre est un multiple de 10 si le chiffre des unités est 0.*

Ces règles permettent de généraliser d'autres critères de divisibilité. Par exemple, pour savoir qu'un nombre est un multiple d'un 12, il suffit de voir si c'est un multiple de 6 ou de 2 puisque $12 = 2 \times 6$; ou encore de 4 ou de 3.

Exercice 2 (raisonner, communiquer)**.** Dans une salle de classe, M. Uratini dispose de 35 chaises pour ses 35 élèves.

1. Peut-il faire des rangés de 2, 3, 5, 9, 10 ? Justifier.

   Il désire faire des rangés avec 5 chaises.

2. Peut-il le faire ? Justifier.

Devoir 2 (calculer, raisonner, chercher)**.** Montrer que 111 111 111 est un multiple de 3.

Fin de la deuxième séance.
La notion de critère est importante en mathématiques car elle permet de simplifier un raisonnement.

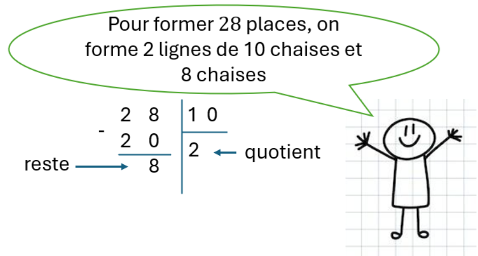
1.1.3 Division euclidienne

Pour partager des parts, il existe un reste qui ne peut être départager. Pour obtenir l'existence d'un tel reste, il existe un théorème mathématique qui le prouve.

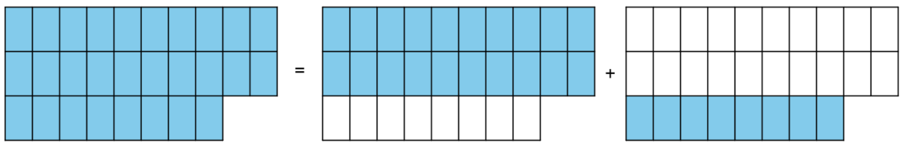
Objectif(s) d'enseignement. Écrire la division euclidienne d'un entier avec un autre.

Pré-requis. Nombres entiers. Diviseurs et multiples.

Apprentissage. Uratini a 28 chaises dans sa salle de classe.



$28 = 2 \times 10 + 8$



Activité de recherche 3 (chercher, calculer, raisonner, modéliser)**.** Uratini dispose de 150 carreaux pour décorer le sol de sa salle de bain. Chaque carreau est un carré de côté 1 m. Ce sol fait 37 m de longueur et 4 m de largeur.

1. Peut-il placer les 150 carreaux sur le sol ? Justifier.
2. Compléter
$$150 = 4 \times \ldots + \ldots$$
3. **Leçon.** De manière générale, si les nombres sont $a = 150$ et $b = 4$, donner une expression mathématique qui écrit a comme au-dessus.

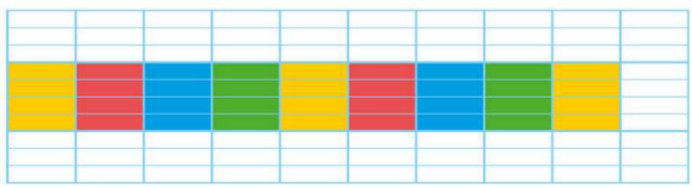
Théorème (division euclidienne, admis)**.** *Soient a et b deux entiers alors il existe q et r deux entiers*
$$a = b \times q + r$$
vérifiant $r = 0$ ou $r = 1, ..., b-1$.

Ce théorème nous dit aussi pourquoi un entier a est un multiple d'un entier b ; car le reste est égal à 0.

Exercice 3 (chercher, calculer, communiquer)**.** Un collège a reçu 360 manuels scolaires. On les range sur des étagères pouvant contenir chacune 25 manuels.

1. Combien faut-il prévoir d'étagères ?

Devoir 3 (calculer, raisonner, chercher, représenter)**.** Temaeva colore les carreaux de son cahier de brouillon en répétant le même motif. Il part de la gauche de la manière suivante :



1. Montrer que le 16ème carreau est de couleur vert.
2. En continuant ainsi, de quelle couleur sera le 102ème carreau ? Justifier.

Fin de la troisième séance.
La division euclidienne est un outil puissant pour connaître le reste.

1.1.4 Problèmes

Exercice 4 (chercher, calculer, communiquer, raisonner)**.** L'objectif de cet exercice est d'appliquer le raisonnement par contre-exemple.

1. Est-ce que tous les multiples de 5 sont des multiples de 2 ? Justifier.
2. Est-ce que tous les multiples de 9 sont des multiples de 3 ? Justifier.

Exercice 5 (chercher, calculer, communiquer)**.** Dans un verger, Marc a planté 358 poiriers en rangées de 18 poiriers.

1. Combien de rangées de poiriers Marc a-t-il plantées ?
2. Combien manque-t-il de poiriers sur la rangée incomplète ?

Exercice 6 (chercher, calculer, communiquer)**.** Une première sauterelle fait des sauts de 5 cm et la deuxième de 3 cm. Elles partent toutes les deux du bord d'une planche de 2 m.

1. Laquelle des deux sauterelles arrivera exactement à l'extrémité de la planche ?
2. Combien de sauts, au minimum, devra faire chaque sauterelle pour atteindre l'extrémité de la planche ?

Exercice 7 (chercher, calculer, communiquer)**.** Rodolphe fait le tour du monde en 80 jours. Le premier jour est un jeudi.

1. Quel jour de la semaine arrivera-t-il ?

Exercice 8 (chercher, calculer, communiquer, raisonner)**.** Soit n un entier.

1. Montrer que le nombre suivant est dans la table de 2.

   $$5 \times 4 \times 3 \times 2$$

   On appelle factoriel de n le nombre noté $n!$ définie par

   $$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2$$

   avec $0! = 1$ et $1! = 1$.

   Par exemple, $3! = 3 \times 2 = 6$ et $4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$

2. Montrer que $5!$ est dans la table de 2.
3. Montrer que $n!$ est pair.

Fin de séquence.
Pensez à bien réviser les exercices pour l'examen.

1.1.5 Examen

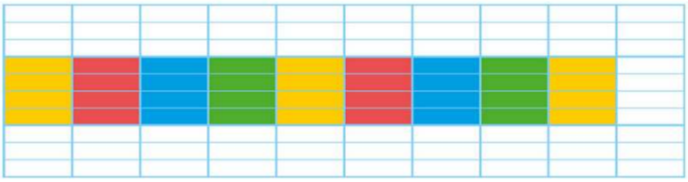
Exercice 1. Est-ce que tous les multiples de 5 sont des multiples de 2 ? Justifier.

Exercice 2 (calculer, raisonner, chercher)**.** Montrer que 111 111 111 est un multiple de 3.

Exercice 3. Rodolphe fait le tour du monde en 80 jours. Le premier jour est un jeudi.

1. Quel jour de la semaine arrivera-t-il ?

Exercice 4 (calculer, raisonner, chercher, représenter)**.** Temaeva colore les carreaux de son cahier de brouillon en répétant le même motif. Il part de la gauche de la manière suivante :



1. Montrer que le 16ème carreau est de couleur vert.
2. En continuant ainsi, de quelle couleur sera le 102ème carreau ? Justifier.

Fin de l'examen 1

1.2 Proportionnalités

« Est-ce que la température monte en été ? »

Ce cours vous apprendra à comprendre ce type de question et à les appréhender. L'intérêt est de pouvoir évidemment apporter des réponses. Mais, c'est surtout la capacité de repérer des phénomènes analogues dans la vie courante ou de s'en ramener à ça.

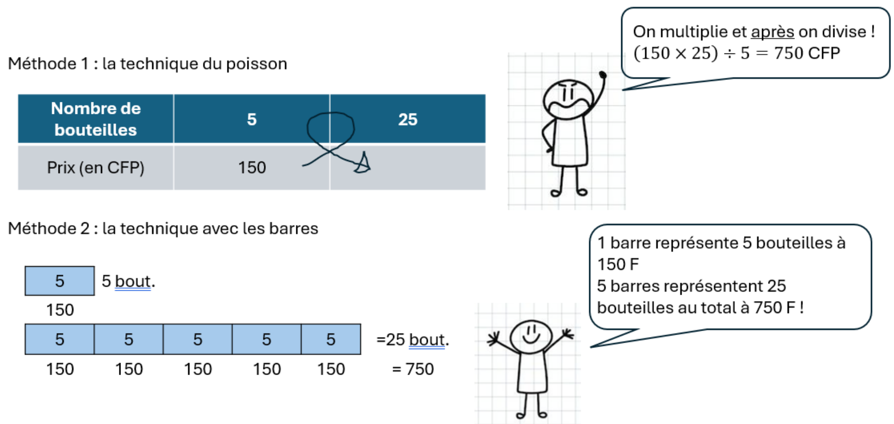
1.2.1 Proportionnalités

On rappelle qu'un tableau à deux lignes est de proportionnalité si chaque élément de la seconde ligne est obtenu en multipliant l'élément qui lui correspond à la ligne une par un nombre.

Objectif(s) d'enseignement. Calculer une quatrième proportionnelle.

Pré-requis. Nombres entiers et divisibilité.

Apprentissage. Dans un magasin, 5 bouteilles d'eau coute 150 CFP. Combien coûte 25 bouteilles d'eau ?



Activité de recherche 1 (chercher, calculer, communiquer)**.** Uratini achète 3 kg de poires pour 850 CFP.

1. Combien coûte 18 kg de poires ? Justifier.

   Le nombre calculé s'appelle la quatrième proportionnelle.

2. **Leçon.** Proposer une définition de la quatrième proportionnelle en s'aidant des mots ci-dessous :

On appelle / Quatrième proportionnelle /

Définition. On appelle quatrième proportionnelle

Théorème. *Soient* a, b, c, x *trois nombres non nuls. Si*

$$a \times x = b \times c$$

alors

$$x = (a \times b) \div c$$

La proportionnalité est fondamental car elle permet de faire des prédictions.

Exercice 1. Au supermarché à Moorea, 6 roses noires sont vendues 2 100 CFP

1. Quel est le prix d'un bouquet de 9 roses noires ? Justifier.

Devoir 1. A Moorea, au bord de la route, 3 kg de pommes coûtent 450 CFP.

1. En complétant le tableau ci-dessous, trouver combien coûtent 5 kg.

Masse de pommes (kg)		
Prix (en CFP)		

Fin de la première séance.
Le sens des calculs fait est primordial pour la résolution de problèmes. Ceci doit être un automatisme afin de pouvoir résoudre ces problèmes.

1.2.2 Problèmes

Exercice 2. Uratini part en France. Il constate qu'une PS5 coûte 599 EUR mais il a de l'argent en Francs pacifiques.

1. En consultant le tableau ci-dessous, combien est-ce que la PS5 lui coûterai en Francs pacifiques ?

   Il y a une règle que Uratini doit respecter : il ne doit pas dépenser plus de 40 000 CFP.

2. Uratini peut-il acheter la PS5 ? Justifier.

Devise	Francs pacifiques (CFP)	Euro (EUR)
	119	1

Tableau. de conversion des devises CFP et EUR.

Exercice 3. Au supermarché à Moorea, 6 roses noires sont vendues 2 100 CFP

1. Quel est le prix d'un bouquet de 24 roses noires ? Justifier.
2. Combien de roses noires peut-on acheter avec 5 950 CFP ? Justifier.

Exercice 4. Uratini marche toujours à la même vitesse. Il parcourt 2 km en 15 min.

1. Quelle distance parcourt-il en 2h ? Justifier.

2. Combien de temps lui faudra-t-il pour faire 7 km ? Justifier.

Exercice 5. Au supermarché de Moorea, 5 cahiers coûtent 700 CFP.

1. En complétant le tableau ci-dessous, trouver combien coûtent 12 cahiers.

Nombre de cahiers		
Prix (en CFP)		

1.2.3 Examen

Exercice 1. Au supermarché à Moorea, 6 roses noires sont vendues 2 100 CFP

1. (/5) Quel est le prix d'un bouquet de 9 roses noires ? Justifier.

Exercice 2. Uratini part en France. Il constate qu'une PS5 coûte 599 EUR mais il a de l'argent en Francs pacifiques.

1. (/2.5) En consultant le tableau ci-dessous, combien est-ce que la PS5 lui coûterai en Francs pacifiques ?

   Il y a une règle que Uratini doit respecter : il ne doit pas dépenser plus de 40 000 CFP.

2. (/2.5) Uratini peut-il acheter la PS5 ? Justifier.

Devise	Francs pacifiques (CFP)	Euro (EUR)
	119	1

TABLEAU. de conversion des devises CFP et EUR.

Exercice 3. Uratini marche toujours à la même vitesse. Il parcourt 2 km en 15 min.

1. (/2.5) Quelle distance parcourt-il en 2h ? Justifier.
2. (/2.5) Combien de temps lui faudra-t-il pour faire 7 km ? Justifier.

Exercice 4. A Moorea, au bord de la route, 3 kg de pommes coûtent 450 CFP.

1. (/5) En complétant le tableau ci-dessous, trouver combien coûtent 8 kg.

Masse de tomates (kg)		
Prix (en CFP)		

Fin de l'examen 2

1.3 Nombres relatifs

« A quelle altitude sommes-nous à la fin d'une randonnée ? »

De tête, les variations de l'altitude perturbent souvent son calcul. Les mathématiques permettent d'établir des stratégies de calcul efficace quelque soit sa complexité. Ce chapitre a pour objectif de vous familiariser aux opérations des nombres relatifs et de parvenir à les calculer.

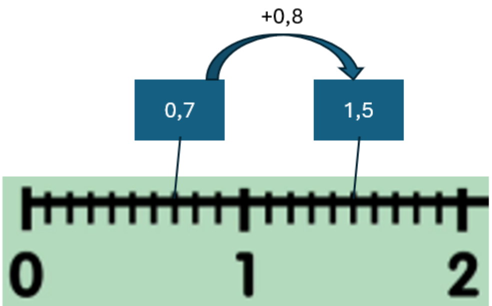
1.3.1 Additivité

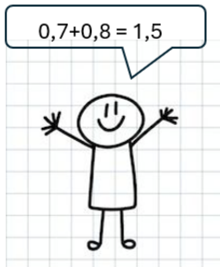
Commençons par l'addition et, implicitement, la soustraction.

Objectif(s) d'enseignement. Savoir additionner et soustraire des nombres relatifs.

Pré-requis. Nombres entiers.

> **Apprentissage.** Une fourmis a avancé de 0,8 cm depuis sa position. Quelques minutes plus tard, de 0,7 cm. Déterminer la longueur totale qu'elle a parcouru depuis sa position.





Activité de recherche 1 (chercher, calculer, communiquer)**.** A 15 ans, Uratini mesure 1,75 cm. Son frère, mesure 20 cm de plus.

1. Calculer la taille du frère de Uratini. Justifier.
2. **Leçon.** Proposer une méthode pour additionner deux nombres relatifs.
3. Faire de même pour la soustraction de deux nombres relatifs.

Nous pouvons extraire une première méthode de calcul.

Méthode. Additionner (resp. soustraire) deux nombres relatifs c'est additionner (resp. soustraire) leur partie entière et leur partie décimale.

Cette méthode se veut généraliste. Vous pouvez vous amusez à rédiger explicitement chaque étape de cette méthode. De toute manière, les exercices, dont vous aurez à faire, vous feront appliquer cette méthode sans vous rendre compte.

Remarque. *Soustraire un nombre c'est ajouter son opposé.*

Remarque. *Additionner ou soustraire plusieurs nombres c'est les multiplier deux par deux.*

Bien sûr, si une opération contient une collection de « + » et « - » alors la méthode est de calculer opération par opération ; deux nombres à la fois. Il est clair, qu'avec le temps, vous obtiendrez des automatismes puissants pour achever des calculs avec une grande complexité : repérer les nombres qui s'annulent, regrouper les nombres par paquet de signe identique, etc.

Exercice 1. En 2024, Uratini pèse 93 kg. Cette année, il a perdu 12,4 kg.

1. Quel est le nouveau poids de Uratini ? Justifier.

Devoir 1 (calculer)**.** En explicitement chaque étape, calculer

$$-2+5+6-2-6-1$$

Fin de la première séance.
L'additivité des nombres relatifs doit être systématique.

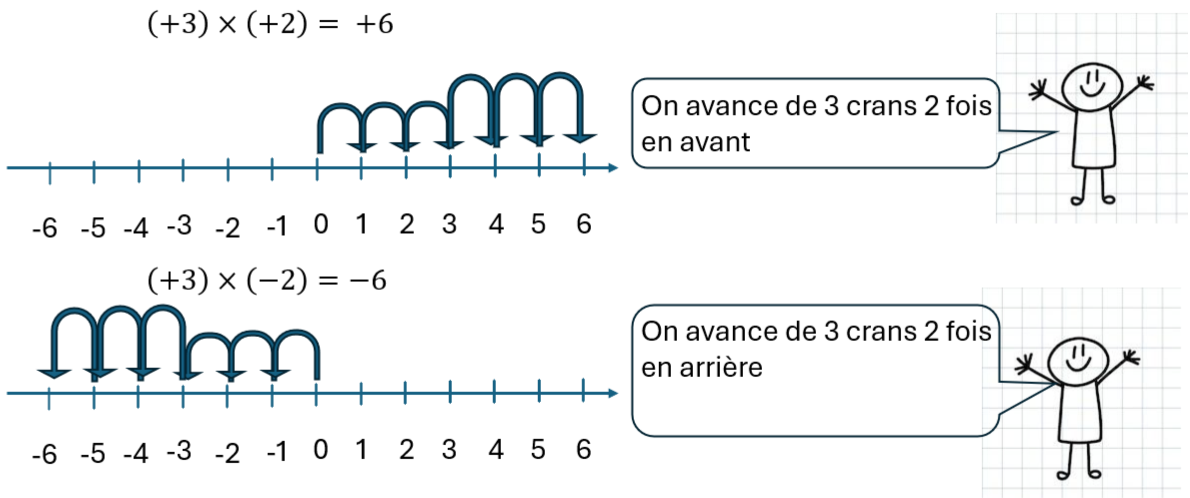
1.3.2 Multiplicativité

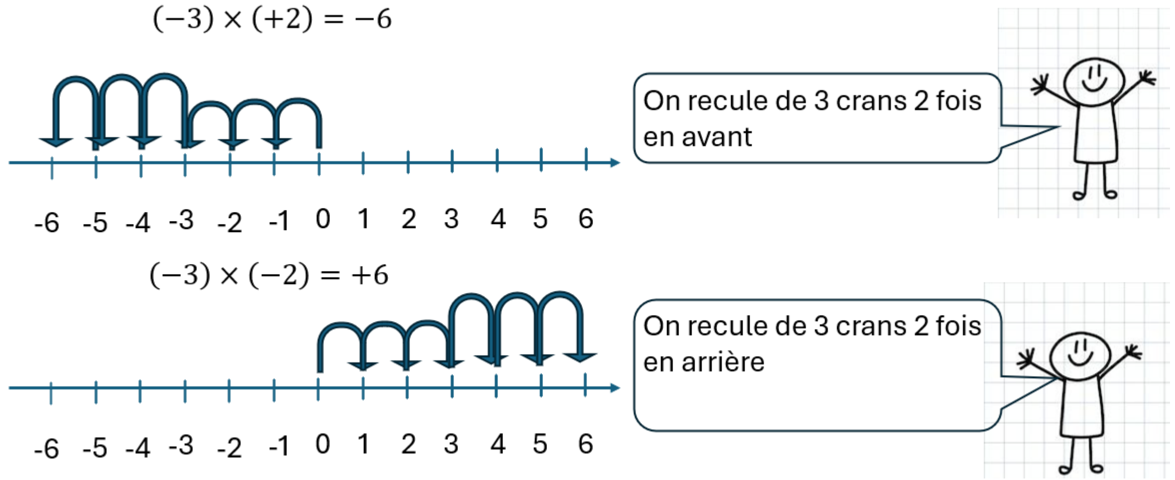
Terminons maintenant sur la multiplication et, implicitement, la division.

Objectif(s) d'enseignement. Savoir multiplier et diviser des nombres relatifs.

Pré-requis. Nombres entiers.

> **Apprentissage.** Uratini parcours une ligne à partir du cran 0 avec les règles suivantes :
> — si on multiplie par un nombre positif : il avance.
> — si on multiplie par un nombre négatif : il recule.





Activité de recherche 2 (chercher, calculer, communiquer)**.** Uratini, Terii, Varo et Toarii ont écris leur déplacement suivant

- Uratini : $(+2) \times (-2)$
- Terii : $(-3) \times (+5)$

- Varo : $(+7) \times (+6)$
- Toarii : $(-10) \times (-8)$

1. Donner les positions de ces 4 personnes.
2. **Leçon.** Quelle propriété tirer entre le signe dans le produit et son résultat ?

Cette activité nous permet d'abord de tirer une propriété.

Propriété (admis)**.** Le produit de deux nombres de mêmes signes donne toujours un nombre positif. Le produit de deux nombres de signes différents donne toujours un nombre négatifs.

Pour s'en souvenir, il suffit juste de se rappeler que si c'est **p**areil alors c'est **p**ositif ; sinon négatif.

Méthode. Multiplier deux nombres relatifs c'est les multiplier comme des nombres et mettre le signe avec la règle.

Remarque. *Diviser deux nombres c'est multiplier l'un et son inverse.*

Remarque. *Multiplier ou diviseur plusieurs nombres c'est les multiplier deux par deux.*

Exercice 2. Donner le signe du résultat de l'opération suivante

$$(-2) \times (+4)$$

Devoir 2. Calculer

$$(-2) \times (-10) \times (+2)$$

Fin de la deuxième séance.
En général, le calcul doit être maîtrisé sur le bout des doigts.

1.3.3 Problèmes

Exercice 3. À 12h, la température est de 5°, entre 12h et 17h, elle augmente de 2°, et entre 18h et 22h, elle diminue de 8°.

1. Quelle est la température à 22h ? Justifier.

Exercice 4. Trouver la solution de l'opération à trou ci-dessous.

$$\ldots + 22 = 12$$

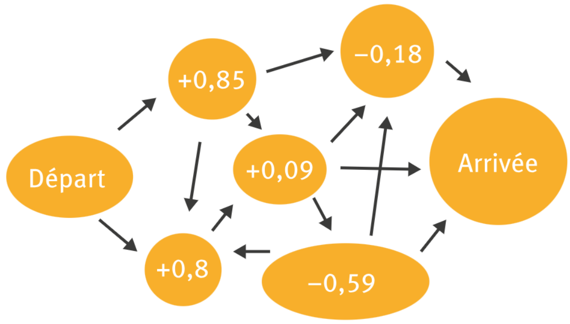
Exercice 5 (calculer)**.** Donner le signe du résultat de l'opération suivante

$$(-6) \times (+7) \times (-8) \times (-9)$$

Exercice 6. En 2024, Uratini pèse 93 kg. Cette année, il a perdu 12,4 kg.

1. Quel est le nouveau poids de Uratini ? Justifier.

Exercice 7 (calculer)**.** On se déplace d'ile en ile entre le départ et l'arrivée. À chaque passage sur une ile, on gagne ou on perd des points.On ne peut passer qu'une fois sur chaque ile.



1. Quel est le trajet qui rapporte le plus de points ?
2. Quel est le trajet qui rapporte le moins de points ?

Exercice 8 (calculer)**.** Montrer que le signe du résultat de l'opération qui suit est positif. Aucun calcul n'est attendu.

$$(-1) \times (-2) \times \cdots \times (-19) \times (-20)$$

Exercice 9 (calculer)**.** Uratini fait une randonnée sur Moorea et sa montre connecté affiche l'altitude

1. Uratini commence à 47 m d'altitude au dessus du niveau de la mer.
2. Uratini monte de 30 m.
3. Uratini descend de 10 m.
4. Uratini monte de 2 m.
5. Uratini descend de 1 m.
6. Uratini descend de 5 m.
7. Uratini monte de 30 m.

Questions.

1. A combien d'altitude Uratini est-il arrivé ? Justifier.

1.3.4 Examen

Exercice 1 (calculer)**.** On pose

$$A = (-1) \times (+2) \times (-3) \times (+4) \times (-5) \times (+6)$$

1. (/5) Calculer A.

Exercice 2 (modéliser,raisonner)**.** Lors d'une promenade dans la vallée de la *Fautaua*, une randonneuse part d'un point A situé à l'altitude de 270 m. Pour atteindre un point B, elle monte de 300 m puis redescend de 200 m, elle remonte de 250 m avant de redescendre de 320 m.

1. (/2.5) Modéliser le problème avec des opérations.
2. (/2.5) La randonneuse se situe-elle au-dessus ou en-dessous du niveau de la mer ? Justifier.

Exercice 3 (chercher)**.** (/5) Trouver la solution de l'opération à trou ci-dessous.

$$\ldots + 33 = 21$$

Exercice 4 (raisonner)**.** (/5) Montrer que le signe du résultat de l'opération qui suit est positif. Aucun calcul n'est attendu.

$$(-1) \times (-2) \times \cdots (-99) \times (-100)$$

Fin de l'examen 3

1.4 Triangles rectangles

La notion de schéma s'avère être insuffisant pour estimer qu'un angle est droit. Il est toutefois possible de le savoir en exploitant la notion de triangle.

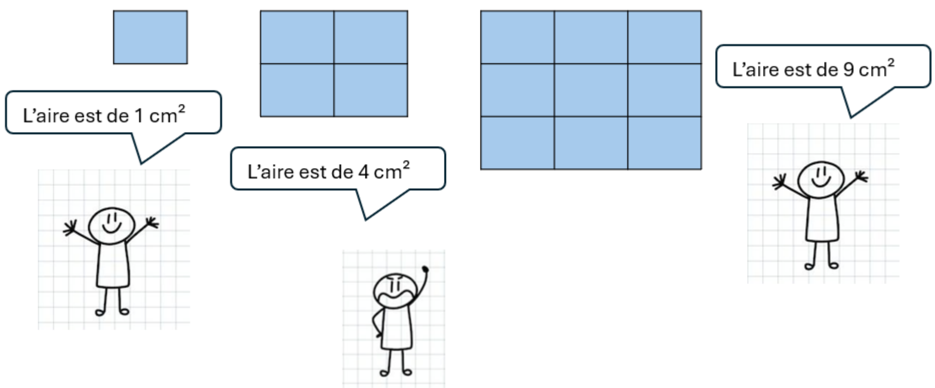
1.4.1 Carrés parfaits

Pour commencer, nous introduisons les nombres entiers étant le produit d'un même nombre ; on l'appelle le carré. Soit x un nombre. On pose $x^2 = x \times x$ et ce symbole x^2 se prononce « x au carré » .

Objectif(s) d'enseignement. Définir des carrés parfaits.

Pré-requis. Nombres entiers.

Apprentissage. Considérons un carré de 1 cm de côté, alors l'aire de ces différents carrés sont :



Activité de recherche 1. Uratini possède un terrain de forme carré dont l'aire est de 25 m^2 de côté.

1. Montrer que ce terrain fait 5 m de côtés. Justifier en détaillant l'opération mathématiques utilisée.

   Ces nombres sont appelés des carrés parfaits.

2. **Leçon.** Définir un carré parfait.
3. Proposer une formule de l'aire d'un carré de côté $c \in \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{N}$ la collection de tous les nombres entiers.

Définition. On dit que a est un carré parfait s'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a = x^2$.

Exemple. Citons
- 25 car $25 = 5^2$
- 100 car $100 = 10^2$

$1 = 1^2$	$36 = 6^2$
$4 = 2^2$	$49 = 7^2$
$9 = 3^2$	$72 = 8^2$
$24 = 4^2$	$81 = 9^2$
$25 = 5^2$	$100 = 10^2$

Tableau. des carrés parfaits inférieurs à 100.

Exercice 1. Considérons un carré de côté 3 cm. Son aire est égale à 9cm^2. On agrandit ce carré de 3 cm de plus.

1. Donner la valeur des nouveaux côtés de ce carré.
2. Montrer que son aire est de 36 cm^2.
3. Trouver $x > 0$ tel que $36 = 9 \times x^2$.

Devoir 1. Trouver $x \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 = 121$.

Fin de la première séance.
Les carrés parfaits sont des nombres remarquables qui facilitent grandement le calcul.
Pensez à connaître les carrés parfaits inférieurs à 100.

1.4.2 Caractérisation des triangles rectangles

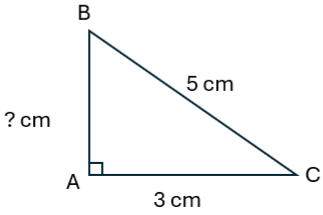
L'intérêt des carrés parfaits dans ce chapitre réside dans la relation que peut exister entre un triangle rectangle et ses côtés. Ainsi, les « objets » (par exemple les points) abordés dans cette section sont dans le plan.

Objectif(s) d'enseignement. Donner une règle qui permet de dire quand un triangle est rectangle ou non.

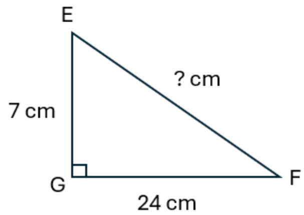
Pré-requis. Nombres entiers. Nombres décimaux. Opérations à trous.

Cette partie est divisée en deux temps. Tout d'abord, nous allons apprendre la rédaction conventionnelle du calcul de côtés du théorème de Pythagore. Ensuite, nous allons réaliser le même exercice en vérifiant qu'un triangle quelconque est triangle ou non.

Apprentissage. Soient ABC et EFG deux triangles rectangles en A et G respectivement. Pour calculer une longueur dans un triangle, on utilise une formule mathématique issue du théorème de Pythagore.



Dans le triangle ABC rectangle en A
On pose
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
On remplace
$$5^2 = ?^2 + 3^2$$
On calcule
$$25 = ?^2 + 9$$
On devine
$$?^2 = 16$$
Et ? = 4 car $\sqrt{16} = 4$



Dans le triangle EFG rectangle en G
On pose
$$EF^2 = FG^2 + GF^2$$
On remplace
$$?^2 = 7^2 + 24^2$$
On calcule
$$?^2 = 49 + 576 = 625$$
On devine
$$?^2 = 625$$
Et ? = 25 car $\sqrt{625} = 25$

Activité de recherche 2. Soit UIP un triangle rectangle en P avec $UI = 13$ et $PI = 12$.

1. Représenter le triangle avec un schéma avec le bon codage géométrique.
2. Calculer PU.
3. **Leçon.** Décrire le théorème de Pythagore.

Théorème (Pythagore, admis)**.** *Soit ABC un triangle. Si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.*

Le théorème de Pythagore fonctionne uniquement pour les triangles rectangles. Pour les autres triangles, ceux non rectangles, il faut une autre formule. Mais en pratique, on trace les hauteurs [1] de chaque sommet pour faire apparaître deux triangles rectangles. Cette stratégie est essentiel et doit être maitriser : c'est la pensée algorithmique [2] .

Remarque. *Dans le théorème, le plus grand côté au carré est toujours placé tout seul dans un seul coin de l'égalité de la formule. Les deux autres côtés étant dans le coin opposé.*

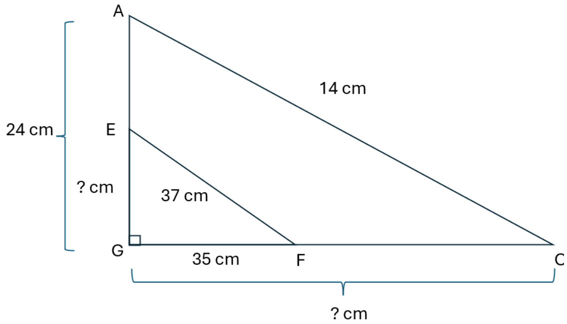
Inversement, pour tout $x \geq 0$, si $x^2 = a$ alors on dit que x est une racine de a ; on le note $\sqrt{a}$ et on le lit « racine carré de a ».

Exercice 2. Soit le triangle TYU rectangle en U avec $TU = 8$ cm et $UY = 15$ cm.

1. Calculer TY.

Devoir 2. Dans la figure ci-dessous, trouver la valeur de toutes les longueurs manquantes.

1. Pour tracer une hauteur, on trace les droites issues d'un sommet du triangle et passant perpendiculairement sur le segment opposé.
2. La pensée algorithmique consiste à décomposer un problème en sous-problèmes relativement plus simples. Ainsi, ne sachant pas facilement calculer les longueurs d'un côté d'un triangle non rectangle, on fait apparaître deux triangles rectangles ; des triangles qu'on sait pertinemment calculer les longueurs.



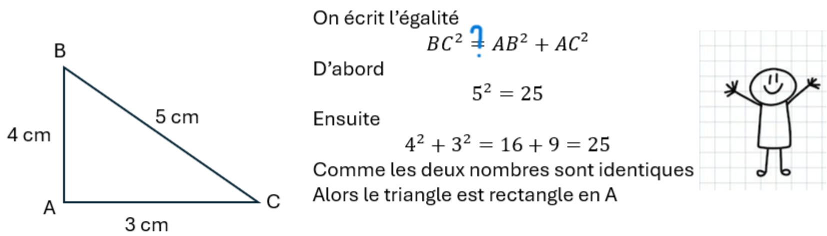
Fin de la deuxième séance.
La rédaction ainsi que la résolution d'une opération à trou sont cruciales pour le brevet. Vous pouvez vous amusez à résoudre d'autres problèmes de ce type en modélisant les longueurs des triangles rectangles avec des triplets pythagoriciens.

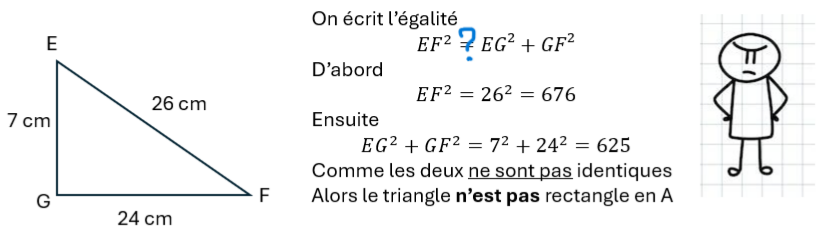
Inversement, le théorème énoncé reste vrai.

Objectif(s) d'enseignement. Savoir montrer qu'un triangle est rectangle.

Pré-requis. Nombres entiers. Vérifier qu'une égalité est vraie.

> **Apprentissage.** On rappelle qu'une égalité est vraie si les quantités à droite et à gauche sont exactement pareils.





Activité de recherche 3. Soit ABC un triangle rectangle avec $AB = 1$, $BC = 2$ et $CA = 3$.

1. Représenter le triangle ABC sur votre feuille de manière schématique.
2. Est-ce que ABC est un triangle rectangle ? on précisera le point où se situe l'angle droit.
3. **Leçon.** Décrire le théorème de Pythagore.

Théorème (Pythagore, admis)**.** *Soit ABC un triangle. Si l'égalité suivante est vraie*

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

alors ABC un triangle rectangle en A.

Dans la vie courante, on rencontre souvent des angles qui ont « l'air » d'être droit et les instruments, telles que l'équerre, ne permettent pas de savoir si c'est le cas. En effet, même bien placée au bord, l'observation nous fera croire que nous sommes en face d'un angle à 90 degré alors que non. C'est pourquoi, le théorème de Pythagore est cruciale car ce résultat est bien plus puissant que les instruments. Il permet d'être sûr que c'est le cas et pour n'importe quel triangle du plan.

Remarque. *Notons que les égalités entre les théorèmes de cette partie sont identiques et que l'on peut simplifier la formulation comme suit*

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \iff ABC \text{ est un triangle rectangle en } A$$

Ce résultat peut être démontrer. Toutefois, devant le manque d'outils à notre disposition, nous allons pas l'aborder ici. Nous nous consacrerons à cet exercice dans les chapitres suivants.

Exercice 3. Soit XYZ un triangle avec $XZ = 5$ $XY = 12$ et $YZ = 13$.

1. Montrer correctement que XYZ est un triangle rectangle dont on précisera le point où se situe l'angle droit.

Devoir 3. Uratini construit sa maison et il veut poser une douche italienne de forme rectangulaire au côté. Il compte mettre ça dans sa salle de bain de forme rectangulaire dont on donne les dimensions ci-dessous.

1. La salle de bain forme-t-elle un triangle rectangle ? Justifier.

Fin de la troisième séance.
Comme la séance précédente, vous pouvez vous entraînez à modéliser dans votre coin des triangles et vérifier qu'ils sont bien rectangles. Aussi, pouvez vous utiliser les triplets pythagoriciens pour vous entraîner sur des triangles qui sont toujours rectangles.

1.4.3 Problèmes

Exercice 4. Soit un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

1. Dessine le triangle ABC.
2. Utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur du troisième côté : BC.
3. Vérifie ta réponse sur le dessin.

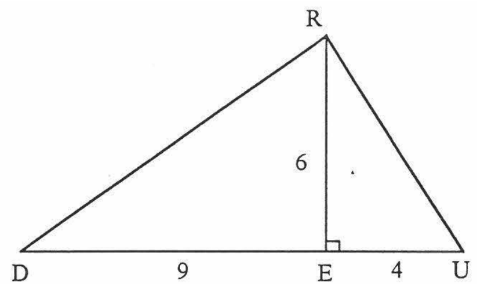
Exercice 5. Soit x un nombre. Résoudre rigoureusement

$$x^2 = 144$$

Exercice 6. Un lanceur de javelot voyage avec son javelot de 2,40 m de long.

1. Comment s'y prend-t-il pour prendre l'avion, sachant que l'aéroport n'accepte aucun colis de plus de 2,20 m de long ?

Exercice 7. Dans la figure ci-dessous.



1. Le triangle DUR est-il rectangle ? Justifier.

Exercice 8. Soit x un nombre. Résoudre rigoureusement

$$(x-10)(x+10)=0$$

Indication. On utilisera l'identité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ avec a, b des nombres.

Exercice 9. Soit le triangle MNO rectangle en O avec $MN = 41$ cm et $OM = 40$ cm.

1. Dessiner le triangle MNO.
2. Calculer NO.

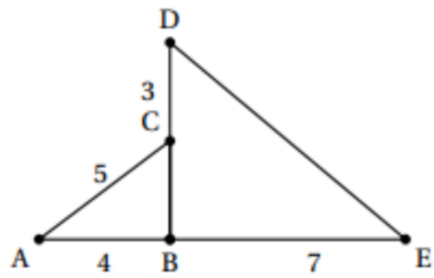
1.4.4 Examen

Exercice 1 (chercher)**.** Soit x un nombre. Résoudre rigoureusement

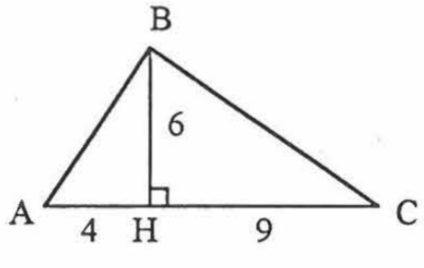
$$x^2 = 121$$

Exercice 2 (raisonner,calculer)**.** Sur le dessin ci-contre, les points A, B et E sont alignés et C le milieu de $[BD]$.

1. (/2) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. (/0.5) En déduire la nature du triangle BDE.
3. (/2.5) Calculer ED. Arrondir le résultat au dixième.



Exercice 3 (calculer, raisonner)**.** (/5) Voici un croquis. Le triangle ABC est-il rectangle ? Prouve ta réponse. Fais un dessin en vraie grandeur.



Exercice 4 (représenter, calculer)**.** Un lanceur de javelot voyage avec son javelot de 2,40 m de long.

1. (/5) Comment s'y prend-t-il pour prendre l'avion, sachant que l'aéroport n'accepte aucun colis de plus de 2,20 m de long ?

Fin de l'examen 4

1.5 Fractions

« Combien de chances qu'un dé sans défaut tombe sur le chiffre 2 ? »

Pour répondre à cette question, les nombres entiers sont insuffisants. Ils ne peuvent pas toujours tout quantifier et on peut constater que $\mathbb{N}$ possède des « trous ». Ainsi, il est opportun d'adopter un système de numérotation plus général pour combler ces vides : les nombres à virgule.

On rappelle les notations des symboles utilisés : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers et $\mathbb{Z}$ celui des nombres relatifs.

1.5.1 Définition

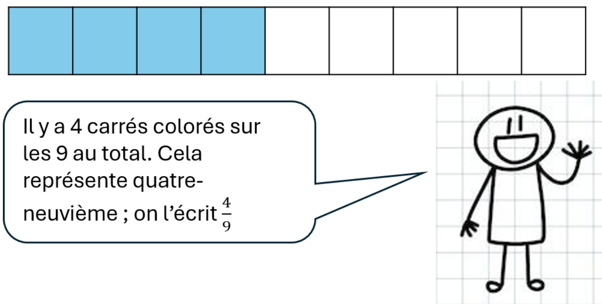
La notion de fraction repose sur la notion de proportion.

Objectif(s) d'enseignement.

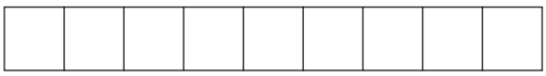
- Un nombre rationnel est défini comme quotient d'un entier relatif par un entier relatif non nul.
- Le quotient de deux nombres décimaux peut ne pas être un nombre décimal.
- La notion d'inverse est introduite, les opérations entre fractions sont étendues à la multiplication et la division.
- Comparer des nombres rationnels, à en utiliser différentes représentations et à passer de l'une à l'autre.

Pré-requis. Nombres entiers. Notion de proportions.

Apprentissage. Pour représenter des proportions, on utilise une nouvelle notation.



Activité de recherche 1. Dans l'image ci-dessous, colorer 8 parties sur les 9 au total.



1. Combien représente ces parties sur la totalité ?
2. A l'aide de la question précédente, comment peut-on écrire cela ?
3. A l'aide de la question précédente, compléter

$$8 = 9 \times \frac{\dots}{\dots}$$

Indication. On pourrait utiliser la calculatrice.

4. **Leçon.** Qu'est ce qu'une fraction ?

Définition. On appelle nombre rationnel tout nombre pouvant s'écrire comme fraction.

Pour tous nombres $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$, on rappelle qu'une fraction désigne un nombre k qui vérifie

$$a = b \times k$$

On le note $k = \frac{a}{b}$ et on appelle

- a le numérateur.
- b le dénominateur.

La collection de tous ces nombres se note $\mathbb{Q}$.

Remarque. *En particulier, il s'agit du nombre avec qui, si on le multiplie par b, donne a.*

Remarque. *Pour tout a, il n'existe aucun sens pour $\frac{a}{0}$. Diviser par 0 n'a mathématiquement <u>aucun sens</u>.*

Remarque. *Soient $a, b \neq 0$ deux nombres, on note que la barre de fraction représente aussi la barre de division*

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

Propriété. *Soit $a \neq 0$ un nombre, alors*

$$\frac{a}{a} = 1$$

Démonstration. Découper une bande en $a \neq 0$ parties et colorer les a parties découpées, revient à reconstruire la bande d'origine. $\square$

Remarque. *Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire comme des fractions, par exemple $\sqrt{2}$.*

Notons que la démonstration de cette remarque nécessite un niveau d'abstraction qui est légèrement au-dessus du cycle 4 [3].

Remarque. *Soient a, b, c, d avec $b, d \neq 0$ alors*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = c \times b$$

Exercice 1. Le seau de Uratini contient 8 litres d'eau. Il verse le contenu de son seau équitablement dans 3 carafes identiques.

1. Quelle fraction peut représenter la quantité d'eau dans chaque carafe ? Justifier votre réponse.

Devoir 1. Herehia coupe un ruban en 8 morceaux de <u>même taille</u>. Le ruban mesure 26 m de long.

1. Quelle est la longueur d'un morceau ? Justifier votre réponse.

Fin de la 1ère séance.

Penser à bien comprendre ce que représente les fractions en vous familiarisant avec des contextes de la vie de tous les jours : genres entre les élèves, la couleur des sacs à dos, etc.

---

3. Précisément, la démonstration classique s'appuie sur le raisonnement par l'absurde. On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel en l'écrivant comme fraction irréductible (n'ayant aucun diviseur en commun après avoir simplifier en facteurs premiers) puis, par définition, on montre que les entiers de son écriture fractionnaire admet un diviseur commun (qui est 2). Contradiction.

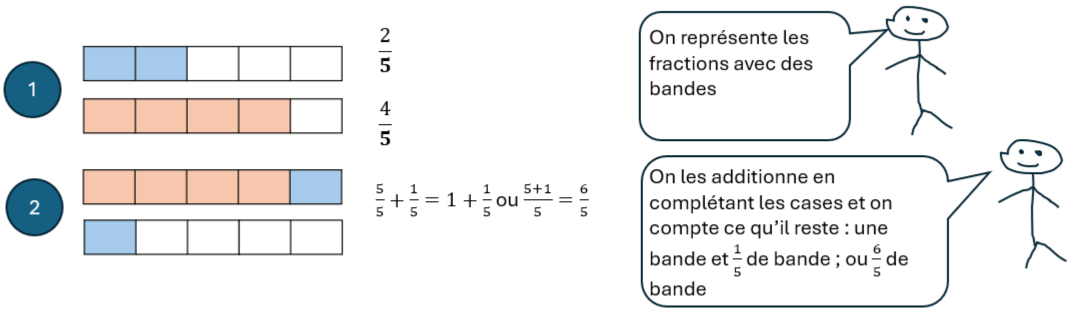
1.5.2 Additivité

La notion de fractions est très utile pour représenter des proportions et dans plusieurs contextes, nous sommes amener à les additionner ou à les soustraire : rapport du nombre de carreaux brisés sur le total, rapport du nombre de passager à chaque destination, etc.

Objectif(s) d'enseignement. Comprendre le sens d'un pourcentage. Appliquer un pourcentage à une grandeur ou à un nombre. Connaître la définition d'un pourcentage.

Pré-requis. Nombres entiers.

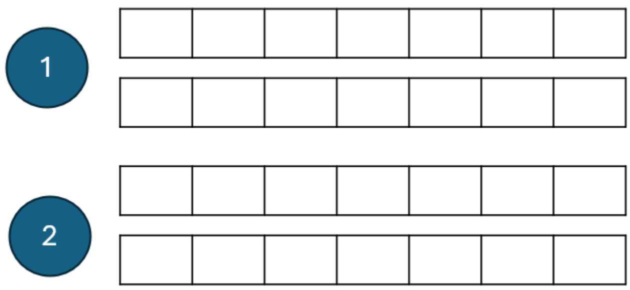
Apprentissage. Calculons $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}$



Activité de recherche 2. L'activité consistera à réitéré la méthode précédente pour comprendre comment additionner deux fractions.

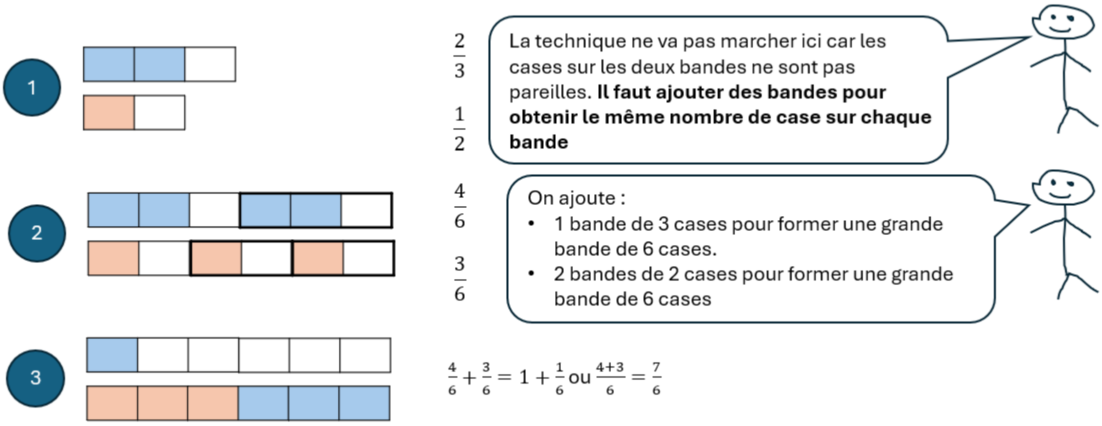
1. Calculer

$$\frac{4}{7} + \frac{5}{7}$$

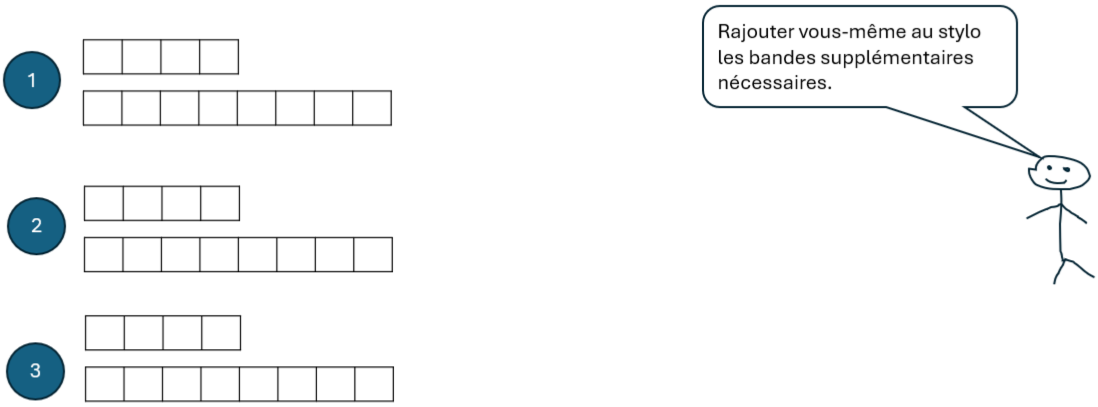


Calculer

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$



2. Calculer $\frac{3}{8}+\frac{2}{4}$.



3. **Leçon.** Comment additionner deux fractions ?

Théorème (admis). *Toutes les fractions s'additionnent et se soustrait.*

Propriété. Soient a, b, c alors

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Méthode. Pour additionner deux fractions on met au même dénominateur.

Exercice 2. Calculer chaque opération.

1. $\dfrac{7}{12}+\dfrac{5}{6}$
2. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{10}$
3. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{12}$

Devoir 2. Uratini tond les $\frac{2}{5}$ de la pelouse chez lui. Hereiti tond $\frac{1}{4}$.

1. Quelle portion de la pelouse Uratini et Hereiti ont-ils tondues à deux ?

Fin de la 2ème séance.
Pour la suite, pensez à résoudre les problèmes.

1.5.3 Problèmes

Exercice 3. Uratini mange $\frac{1}{8}$ d'un gâteau et Taneura en mange $\frac{1}{4}$ à son tour.

1. Quelle portion de gâteau Taneura et Uratini ont-ils mangée à eux deux ?
2. Quelle portion de gâteau Taneura a-t-il mangé de plus que Halima ?

Exercice 4. Turiana répartit 2 litres de lait équitablement dans 5 carafes identiques.

1. Quelle quantité de lait chaque carafe contient-elle ?

Exercice 5. Samuel a mis $\frac{3}{4}$ d'heure pour aller de chez lui à Tiahura. Ensuite, il a mis $1+\frac{1}{4}$ d'heure pour rentrer à la maison.

1. Montrer que
$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$
2. Combien de temps en plus a-t-il mis au retour qu'à l'aller ?

Exercice 6. Considérons une pièce sans défaut. On le lance et on note le résultat.

1. Combien de chances a-t-on d'obtenir pile ? Donner le résultat sous forme de fraction.
2. Montrer que de deux manières différentes que
$$\frac{1}{2}<1$$

Exercice 7. Erita répartit un paquet de bonbons de 4 kg de manière égale entre ses 6 petits enfants.

1. Quelle quantité de bonbons, de kilogrammes, chacun des petits-enfants reçoit-il ?

Exercice 8. Calculer

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

1.5.4 Examen

Exercice 1 (calculer)**.** Calculer
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

Exercice 2 (représenter, raisonner)**.** Uratini a mangé $\frac{6}{9}$ de chocolats. Il partage le reste à Hereiti et elle mange tout.

1. Colorer les parts de chocolats que Uratini a mangé.

2. Donner sous forme fractionnaire le nombre de parts de chocolat que Hereiti a mangé.

Exercice 3 (modéliser)**.** Considérons une pièce équilibrée et sans défaut. Uratini lance une pièce deux fois et chaque les résultats du lancé 2 ne dépendant pas du résultat obtenu au lancé 1.

1. Montrer que les chances d'obtenir pile au lancer 1 est de $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que les chances d'obtenir pile au lancer 2 est de $\frac{1}{2}$

Exercice 4 (calculer, communiquer)**.** Samuel a mis $\frac{3}{4}$ d'heure pour aller de chez lui à Tiahura. Ensuite, il a mis $1 + \frac{1}{4}$ d'heure pour rentrer à la maison.

1. Montrer que
$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$
2. Combien de temps en plus a-t-il mis au retour qu'à l'aller ?

Fin de l'examen 5

1.6 Calcul littéral

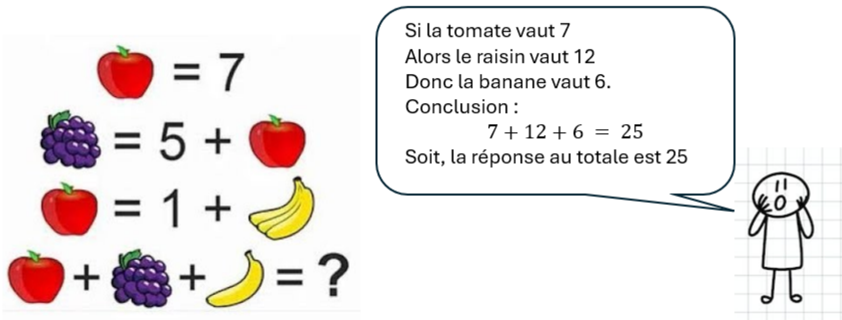
Ce que décrit toute la simplicité et, par effet de cause, la complexité des mathématiques, est l'utilisation de lettres pour expliquer un phénomène.

1.6.1 Substitution

Objectif(s) d'enseignement. Définir une substitution.

Pré-requis. Nombres entiers.

Apprentissage. Considérons le problème « bête » qui suit.



Maintenant, le principe est exactement le même sauf que les objets sont représentés par des lettres.

Dans cette partie, jusqu'à la fin, toute écriture formée d'opérations et de lettres s'appellera une expression littérale.

Activité de recherche 1. Soient deux nombres représentés par les lettres x, y alors on pose

$$\begin{cases} x &= 12 \\ x + y &= 20 \end{cases}$$

1. Résoudre le problème en trouvant combien vaut y.
2. **Leçon.** Définir le mot substitution avec les termes ci-dessous.

Substituer une lettre par un nombre / remplacer / lettre par / nombre.

La représentation d'un tel problème peut s'avérer fastidieux mais il n'en est pas. En effet, on liste les expressions littérales qui s'avéreraient importantes pour le problème et après on le résoudre.

Définition. Substituer une lettre par un nombre c'est remplacer cette lettre par un nombre.

Exercice 1. Soient x, y des nombres et on pose

$$\begin{cases} x &= 11 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

1. Calculer x et y
2. Calculer $x + y + y$.

Devoir 1. Soient x, y, z des nombres et on pose

$$\begin{cases} x &= 6 \\ y &= 3 + x \\ x &= 2 + z \end{cases}$$

1. Calculer x, y et z.
2. Calculer $x + y + z$.

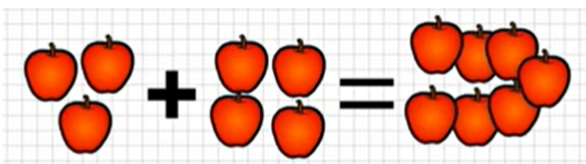
Fin de la première séance.
La substitution est importante car elle permet de calculer de nouvelles expressions littérales et de les vérifier correctement.

1.6.2 Réduction

Objectif(s) d'enseignement. Définir une réduction.

Pré-requis. Nombres entiers. Substitution.

Apprentissage. Additionner des pommes c'est les compter.



Maintenant, le principe est exactement le même sauf que les objets sont représentés par des lettres.

Activité de recherche 2. Soient un nombre représenté par la lettre x.

$$x + x + 3x + 53$$

1. En calculant, montrer que l'on a

$$x + x + 3x + 53 \longrightarrow 5x + 53$$

On sait que

$$x \times x = x^2 \text{ et } x \times x \times x = x^3$$

2. En calculant, montrer que l'on a

$$x \times x \times x + x + x \longrightarrow x^3 + 2x$$

3. **Leçon.** Définir le mot réduction avec les termes ci-dessous.

Réduire une expression / compter / toutes / les lettres

Définition. Réduire une expression c'est compter toutes les lettres.

Exercice 2. Soient x, y des nombres et on pose

$$2y + 3x + 4y$$

1. Réduire cette expression.

Devoir 2. Soient x, y, z des nombres et on pose

$$2y + 13x + 2y + 5z - 10x$$

1. Réduire cette expression.

Fin de la deuxième séance.
La réduction est fondamentale pour réduire des problèmes de calcul le plus simplement possible.

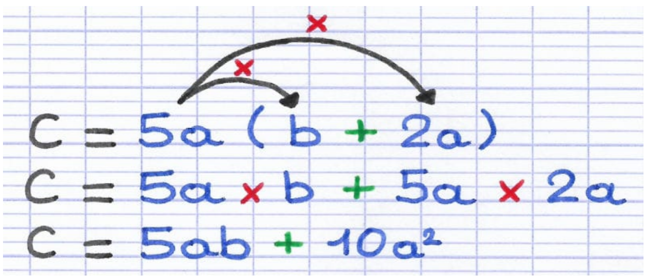
1.6.3 Distribution

Là où simplifier une expression revient à la réduire en triant les termes (ou facteurs selon l'opération), on peut aussi distribuer. Cette notion est comparable à la notion de distribution de sacs à différents individus.

Objectif(s) d'enseignement. Définir une distribution dans le calcul littéral.

Pré-requis. Nombres entiers.

Apprentissage. Soient deux nombres a, b. Distribuer l'expression $5a(b + 2a)$ c'est



Activité de recherche 3 (chercher, calculer, communiquer)**.** Soient x, y deux nombres.

1. Distribuer.

$$5x(2y - x)$$

2. **Leçon.** Définir le mot distribuer avec les termes ci-dessous.

Distribuer une lettre par un nombre / décomposer une expression / somme de produit.

Soient k, x et y trois nombres.

Définition. Distribuer un facteur par un nombre c'est dégrouper l'expression en somme.

$$k \times (x + y) = k \times x + k \times y$$

Autrement dit, distribuer c'est donner à chaque terme son facteur.

La double distributivité suit le même principe sauf qu'on distribue sur deux termes en partant du premier facteur.

$$(a + b) \times (x + y) = (a + b) \times x + (a + b) \times y$$

Exercice 3. Soit n un nombre entier. On rappelle que

— un entier n est pair si $n = 2k$ avec k un entier.
  — Par exemple, $2 = 2 \times 1$, $22 = 2 \times 11$, $50 = 2 \times 25$ ou encore $100 = 2 \times 50$.

— un entier n est impair si $n = 2k + 1$ avec k un entier.
  — Par exemple, $3 = 2\times1+1$, $71 = 2\times35+1$, $67 = 2\times33+1$ ou encore $101 = 2\times50+1$.

1. Distribuer $n(n + 1)$.
2. Si $n = 2k$, montrer que $n(n + 1)$ est pair.
3. Si $n = 2k + 1$, montrer que $n(n + 1)$ est pair.
4. Conclure que $n(n + 1)$ est pair pour tout n.

Devoir 3. Soient x, y, z des nombres et on pose

1. Calculer x, y et z.
2. Calculer $x + y + z$.

Fin de la troisième séance.
Cette technique est très importante car elle décompose efficacement des problèmes de calculs.

1.6.4 Factorisation

Là où on distribue à chaque individu un facteur, le sens inverse s'appelle la factorisation. En particulier, tous les individus, possédant le même facteur, appelé le facteur commun, redonnent leur facteur.

Objectif(s) d'enseignement. Définir une distribution.

Pré-requis. Nombres entiers.

Apprentissage. Soient deux nombres x, y. Factoriser l'expression $10xy + 15x$

$$A = 10xy + 15x$$
$$A = 5 \times 2 \times x \times y + 5 \times 3 \times x$$
$$A = 5x(2y + 3)$$

Activité de recherche 4 (chercher, calculer, communiquer)**.** Soient x, y deux nombres.

1. Factoriser.
$$10xy - 40x^2$$
2. **Leçon.** Définir le mot factoriser avec les termes ci-dessous.

Soient k, x et y trois nombres.

Définition. Factoriser une expression par un facteur c'est regrouper l'expression en facteur.

$$k \times x + k \times y = k \times (x + y)$$

Plus simplement, factoriser c'est le contraire de distribuer. Distribuer c'est donner et factoriser c'est reprendre.

Exercice 4. Soient x, y, z des nombres et on pose

$$A = xy + zxy^2$$

1. Factoriser A.

Devoir 4. Soient x, y, z des nombres et on pose

$$B = (x + 1)y + (x + 1)z + (x + 1)x$$

1. Factoriser B.

Fin de la quatrième séance.
La distribution et la factorisation vont de pair. Leur maitrise est indispensable pour la simplicité des calculs et la résolution de problèmes.

1.6.5 Problèmes

Exercice 5 (calculer, raisonner)**.** Soit x un nombre. On pose

- $A = 3(x + 1)$
- $B = 3(x + 1) - 2(x - 5)$

Exercice 6 (calculer, raisonner)**.** Soit x un nombre. On pose

- $A = (2x + 3)(x - 4)$
- $B = (2x + 2)(2x + 1)$

Exercice 7 (calculer)**.** Soient x, y deux nombres. Montrer que

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Exercice 8 (modéliser)**.** Un rectangle a pour longueur $(2x-3)$ cm et pour largeur $(x+1)$ cm.

1. Écrire l'expression de son aire en fonction de x.
2. Calculer cette aire pour $x = 5$.
3. On veut que l'aire soit égale à 60 cm^2. Quelle équation obtient-on ?

Exercice 9 (calculer)**.** Soient x, y deux nombres. Montrer que

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Exercice 10 (chercher, communiquer)**.** Cet exercice consiste à connaître la parité de deux nombres consécutifs. Deux nombres consécutifs sont deux nombres qui se suivent : par exemple, 2 et 3 ; 10 et 11 ; 99 et 100 ; etc.

1. Choisir deux nombres entiers positifs consécutifs n et $n+1$. Puis calculer leur produit et écrire dans le tableau ci-dessous.

Essai	n	$n+1$	$n(n+1)$
1			
2			
3			
4			

2. Répéter encore 3 fois.

   On affirme : « le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair ».

3. Est-ce vrai ? Justifier par un raisonnement littéral.

Exercice 11 (calculer)**.** Soient x, y deux nombres. Montrer que

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

1.6.6 Examen

Exercice 1 (calculer, raisonner)**.** Soit x un nombre. On pose

- $A = 3(x+1) - 2(x-5)$
- $B = (2x+3)(x-4)$

1. Distribuer et réduire A et B.
2. Résoudre $A = B$

Exercice 2 (modéliser)**.** Un rectangle a pour longueur $(2x+3)$ cm et pour largeur $(x-1)$ cm.

1. Écrire l'expression de son aire en fonction de x.
2. Calculer cette aire pour $x = 5$.
3. On veut que l'aire soit égale à 60 cm^2. Quelle équation obtient-on ?

Exercice 3 (représenter)**.** Soient x, y deux nombres.

1. Montrer que
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$
2. Si x et y sont pairs, montrer que $x^2 - y^2$ est pair.
3. Si x et y sont impairs, montrer que $x^2 - y^2$ est pair.

Exercice 4 (chercher, communiquer)**.** Cet exercice consiste à connaître la parité de deux nombres consécutifs. Deux nombres consécutifs sont deux nombres qui se suivent : par exemple, 2 et 3 ; 10 et 11 ; 99 et 100 ; etc.

1. Choisir deux nombres consécutifs n et $n+1$

   On affirme : « le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair ».

2. Est-ce vrai ? Justifier par un raisonnement littéral.

Fin de l'examen 6

Chapitre 2

Deuxième trimestre

Dans la continuité du trimestre précédent, certaines notions sont approfondies : nombres premiers et fractions. De nouveaux concepts font leur apparition, statistique et transformation géométriques. Ces concepts permettront de saisir plus rigoureusement la modélisation des phénomènes pour la prédiction avec les statistiques ou encore la notion d'agrandissement et de réduction.

2.1 Nombres premiers

Rappelons que les couleurs sont une combinaison de couleurs connues. En remontant aux origines, toute couleur peut être formée à partir de trois couleurs, le rouge, le bleu et le jaune, appelées couleurs primaires. Pour les nombres en mathématiques, le principe est exactement le même, tout nombre peut être formé de produits de facteurs de nombres premiers.

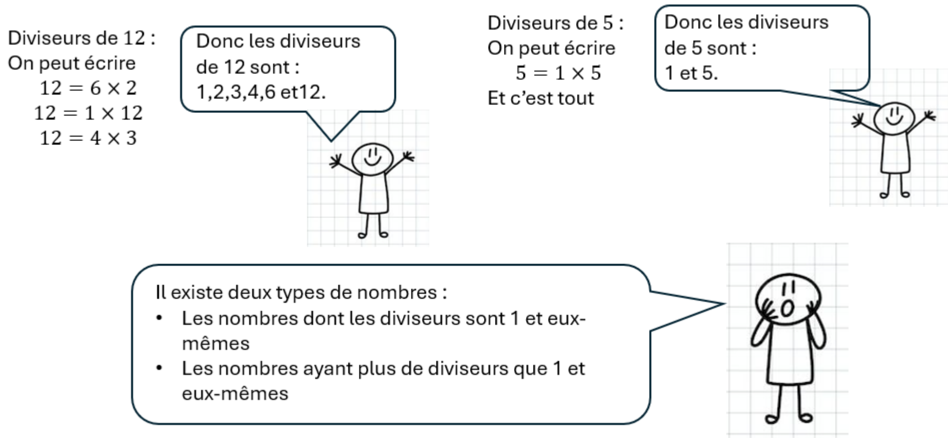
2.1.1 Définition

Rappelons la notion de multiple et de diviseur.

Objectif(s) d'enseignement. Rappeler la notion de nombres premiers et lister les nombres premiers entre 1 et 10 ; ou plus.

Pré-requis. Multiples et diviseurs.

> **Apprentissage.** Les nombres peuvent être classés en deux familles : les nombres premiers et les nombres composés.



Activité de recherche 1 (crible d'Eratosthène)**.** Dans la liste des nombres qui suivent,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Attention. On admettra que 1 est le seul nombre ayant que un seul et unique diviseur : lui-même.

1. Lister les nombres dont les diviseurs sont eux-mêmes et 1.
2. **Leçon.** Donner la définition d'un nombre premier.
3. Peut-on obtenir cette liste de manière plus simple ? Tester votre hypothèse pour une liste de nombres plus grande.

Définition. Un nombre est premier si ses seuls diviseurs sont lui-même et 1. Sinon, il est composé.

Par convention, on dira que 1 n'est pas premier.

Théorème. *Les nombres premiers entre 2 et 10 sont 2, 3, 5 et 7.*

Démonstration. On applique le crible d'Eratosthène pour la liste des entiers de 2 à 10. □

Propriété (Eratosthène)**.** Lister les nombres premiers inférieurs à n c'est parcourir la liste des nombres et :

1. retenir le nombre premier et supprimer tous ses multiples.
2. continuer à parcourir, en évitant les nombres supprimés, puis appliquer l'étape 1 si le nombre n'est pas supprimé.

Exercice 1. Déterminer les nombres premiers entre 2 et 30.

Devoir 1. Déterminer les nombres premiers entre 2 et 100.

Fin de la première séance.

La notion de nombres premiers prendra tout son sens dans la partie que l'on verra après.

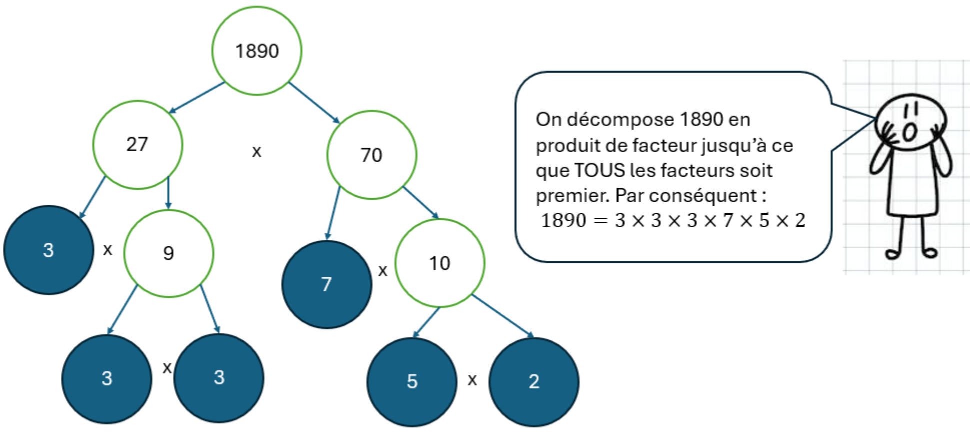
2.1.2 Factorisation en facteurs premiers

Rentrons dans le coeur du sujet dont on a fait l'analogie avec les couleurs.

Objectif(s) d'enseignement. Factoriser un nombre en facteurs premiers.

Pré-requis. Multiples et diviseurs.

Apprentissage. Rappelons que les nombres premiers entre 2 et 10 sont 2, 3, 5 et 7. Pour décomposer un nombre en facteurs de nombres premiers, on écrit successivement chaque diviseur jusqu'à ce qu'il soit premier ; on peut faire un schéma pour ne pas se perdre.



Activité de recherche 2. L'objectif de cet exercice est de décomposer 120 en facteur de nombres premiers (aussi dit en facteur premier) et de comprendre la décomposition en facteur premiers.

1. Écrire 120 en produit de 2, 3 et 5.
2. Quel est la décomposition en facteur premier de 11 ? Justifier.
3. Faire pareil pour 900.
4. **Leçon.** Quel théorème peut-on déduire ?

Théorème (admis)**.** *Tout nombre peut se factoriser en produits de nombres premiers.*

Remarque. *On peut comparer les nombres premiers avec des notions de la vie courante : couleurs primaires formant les couleurs, atomes formant les substances solides, liquides ou gazeuses.*

Exercice 2. Décomposer en facteurs premiers les deux nombres suivants.

1. 1225.
2. 9876.

Devoir 2. Un fleuriste reçoit une livraison de 95 *Tiare*. Peut-il composer des bouquets de 5 *Tiare* et utiliser toutes les fleurs ? Pourquoi ? Résoudre ce problème de deux manières différentes.

Fin de la deuxième séance.

Pensez à décomposer des nombres, même les plus compliquer, pour vous perfectionner.

2.1.3 Fractions irréductibles

La décomposition en facteurs premiers est essentielle pour écrire un nombre le plus simplement possible.

Objectif(s) d'enseignement. Factoriser un nombre en facteurs premiers.

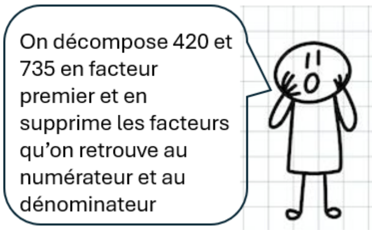
Pré-requis. Multiples et diviseurs.

On rappelle que pour tout $a \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\frac{a}{a} = 1$$

Apprentissage. On réduit une fraction jusqu'à ce qu'elle soit irréductible. Réduisons la fraction $\frac{420}{735}$.

$$\frac{420}{735} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 2}{3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{2 \times 2}{7 \times 7} = \frac{4}{49}$$



Activité de recherche 3. Cette activité a pour but de réduire des fractions jusqu'à ce qu'elles soient irréductibles. Mais aussi, de donner un aperçu de son utilité dans un cas pratiquement simple.

1. Réduire les fractions
$$\frac{80}{300} \text{ et } \frac{180}{108}$$
2. Calculer
$$\frac{4}{15} \times \frac{3}{5}$$
3. **Leçon.** Laquelle des deux fractions est-il plus simple à calculer : $\frac{80}{300} \times \frac{180}{108}$ ou $\frac{4}{15} \times \frac{3}{5}$? Pourquoi ?
4. **Leçon.** Expliquer comment réduire une fraction de manière irréductible.

Théorème (admis)**.** *Tout nombre peut se factoriser en produits de nombres premiers.*

Remarque. *Si a/b est irréductibles alors on dit que a et b sont premiers entre eux.*

Exercice 3. Réduire la fraction de deux manières différentes.

$$\frac{126}{128}$$

Devoir 3. Calculer de deux manières différentes.

$$\frac{52}{78} \times \frac{104}{156}$$

Fin de la troisième séance.

Cette partie permet de toucher une des applications importantes de la notion de nombres premiers. Ils permettent de faciliter les calculs complexes en des calculs simples et moins fastidieux.

2.1.4 Problèmes

Exercice 4. Réduire les fractions suivantes.

- $\frac{1234}{248}$
- $\frac{1472}{2482}$
- $\frac{2222}{2222}$

Exercice 5. Montrer que la fraction ci-dessous est un entier.

$$\frac{222222222}{2}$$

Exercice 6. Le but de cet exercice est de rappeler les bases de ce chapitre.

1. Décomposez les nombres 242 et 350 en produits de facteurs premiers.
2. En utilisant les décompositions précédentes, listez tous les diviseurs communs de 242 et 350.
3. Déterminez le plus grand diviseur commun (PGCD) de 242 et 350.
4. Déterminez le plus petit multiple commun (PPCM) de 242 et 350.

Exercice 7. Un groupe d'amis souhaite organiser une soirée jeux. Ils ont acheté 120 biscuits et 96 bonbons. Ils veulent préparer des petits sacs identiques pour chaque ami, contenant le même nombre de biscuits et le même nombre de bonbons.

1. Quel est le nombre maximum de sacs identiques qu'ils peuvent préparer ?
2. Combien de biscuits et de bonbons y aura-t-il dans chaque sac ?

   Pour la soirée, ils commandent une grande pizza. Un premier mange $\frac{1}{3}$ de la pizza et un second mange $\frac{1}{4}$ de la pizza.

3. Quelle fraction de la pizza a été mangée en tout ? Donnez le résultat sous forme irréductible.
4. Quelle fraction de la pizza reste-t-il ? Donnez le résultat sous forme irréductible.

Exercice 8. Calculez l'expression et donnez le résultat sous forme irréductible :

1. $\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3}$
3. $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3}$

2.1.5 Examen

Exercice 1. Le but de cet exercice est de rappeler les bases de ce chapitre.

1. (/2) Décomposez les nombres 252 et 360 en produits de facteurs premiers.
2. (/1) En utilisant les décompositions précédentes, listez tous les diviseurs communs de 252 et 360.
3. (/1) Déterminez le plus grand diviseur commun (PGCD) de 252 et 360.
4. (/1) Déterminez le plus petit multiple commun (PPCM) de 252 et 360.

Exercice 2. (/5) Calculez l'expression et donnez le résultat sous forme irréductible :

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

Exercice 3. Un groupe d'amis souhaite organiser une soirée jeux. Ils ont acheté 120 biscuits et 96 bonbons. Ils veulent préparer des petits sacs identiques pour chaque ami, contenant le même nombre de biscuits et le même nombre de bonbons.

1. (/1) Quel est le nombre maximum de sacs identiques qu'ils peuvent préparer ?
2. (/1) Combien de biscuits et de bonbons y aura-t-il dans chaque sac ? Justifier.

   Pour la soirée, ils commandent une grande pizza. Un premier mange $\frac{1}{3}$ de la pizza et un second mange $\frac{1}{4}$ de la pizza.

3. (/1) Quelle fraction de la pizza a été mangée en tout ? Donnez le résultat sous forme irréductible.
4. (/2) Quelle fraction de la pizza reste-t-il ? Donnez le résultat sous forme irréductible.

Exercice 4. (/5) Soit n un entier positif, montrer que n et $n+1$ sont premiers entre eux.

Fin de l'examen 7

2.2 Transformations géométriques

Le contrôle des dimensions d'une image sur les téléphones nécessitent une approche mathématiques rigoureuse et solide. Avant d'en arriver là, on commence d'abord par contrôler les dimensions de figures simples comme le carré, le triangle ou encore le rectangle puisque tout polygone peut être divisé en triangle [1].

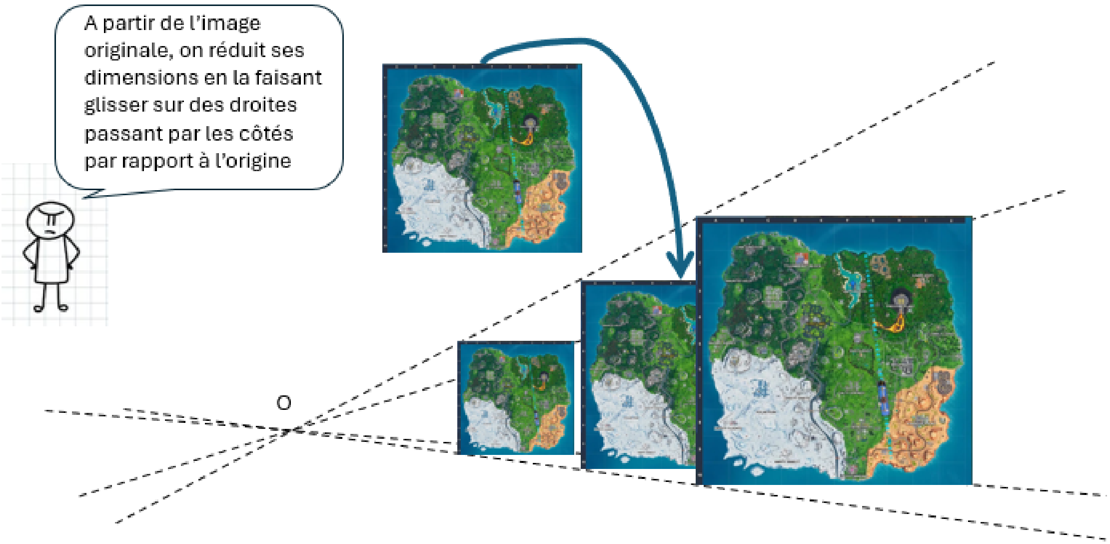
2.2.1 Agrandissement et réductions

Commençons par saisir cette notion d'agrandissement et réduction de figures.

Objectif(s) d'enseignement. Définir un agrandissement et une réduction.

Pré-requis. Proportionnalité.

Apprentissage. Agrandir et réduire une figure c'est changer ses dimensions.



Activité de recherche 1. Soit ABC un triangle avec $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm et $AC = 4$ cm. On agrandie ce triangle par un rapport de 2. Cette activité consiste à introduire la notion de réduction et d'agrandissement avec un triangle.

1. Faire un schéma codé des triangles.
2. Compléter les longueurs des triangles.
3. Compléter le tableau.

	AB	BC	AC
Triangle ABC	7	5	4
Nouveau triangle	14		

4. Dans l'activité, pour quel nombre on doit multiplier les longueurs pour <u>réduire</u> le triangle ?
5. Dans l'activité, pour quel nombre on doit multiplier les longueurs pour <u>agrandir</u> le triangle ?
6. **Leçon.** Définir l'agrandissement et la réduction d'une figure en précisant le rapport pour chaque transformation.

Définition. On dit qu'une figure

— est agrandie si le rapport entre la figure et l'originale est > 1.

— est la même si le rapport entre la figure et l'originale est $= 1$.

— est réduite si le rapport entre la figure et l'originale est < 1.

Remarque. *Concernant les solides, le principe est exactement le même. Par exemple, agrandir un cylindre de hauteur $h > 0$ et de rayon $r > 0$ c'est multiplier h et r par un nombre $k > 1$.*

Cette notion d'agrandissement s'appelle plus formellement une homothétie. Cette transformation change les longueurs d'une figure tout en conservant les angles. Dans le cas des triangles, ces triangles sont appelés des triangles semblables.

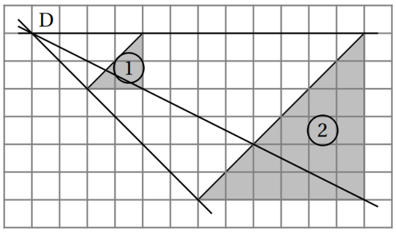
Remarque. *Agrandir ou réduire une figure c'est appliquer une homothétie de centre O et de rapport $k > 0$.*

Remarque. *Agrandir ou réduire une figure et l'inverser c'est appliquer une inversion de centre O et de rapport $k < 0$.*

Exercice 1. Soit $ABCD$ un carré de côté $12,5$ cm. On note $EFGH$ le carré de côté 25 cm.

1. $EFGH$ est-il une réduction de $ABCD$? Justifier votre réponse.

Devoir 1. Sur la figure suivante, le triangle 2 est l'image du triangle 1 par une transformation.



1. De quelle transformation il s'agit et préciser le rapport.

Fin de la première séance.

Les figures que l'on traite ici sont les plus élémentaires. Entraînez-vous sur des figures plus complexes : des rectangles, un polygone, etc. Étudiez leur longueur et pourquoi pas leurs aires ?

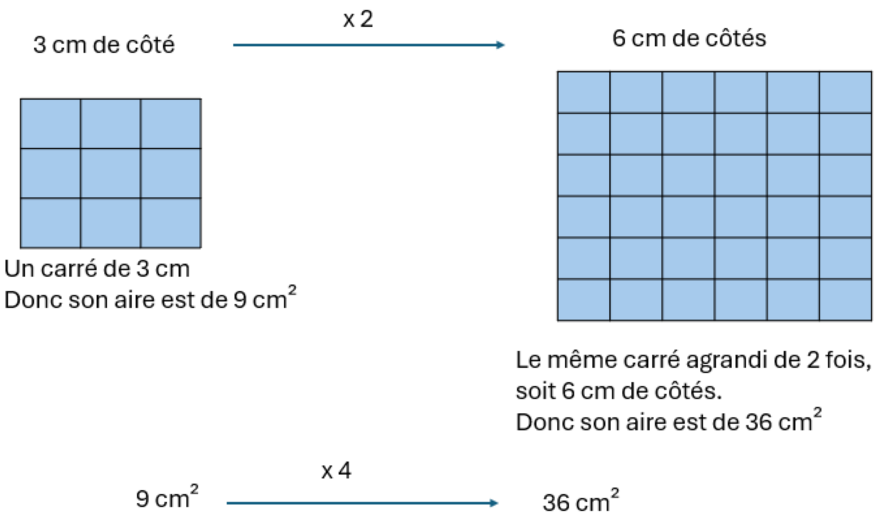
2.2.2 Propriétés

Si on réduit la portion d'un terrain d'une personne, il est claire que sa superficie en est directement impactée. En géométrie, c'est pareil : modifier les dimensions d'une figure a un impact sur son aire, même chose pour le volume sur les solides.

Objectif(s) d'enseignement. Comprendre les effets de l'agrandissement ou de la réduction sur les aires ou les volumes.

Pré-requis. Carrés parfaits. Agrandissements et réductions.

Apprentissage. On se donne un carré de 3 cm de côté auquel on augmente de 2 fois ses côtés. Puis, on étudie leurs aires.



Activité de recherche 2. L'objectif de cette activité est de savoir par combien on doit multiplier l'aire de la figure de départ pour anticiper l'aire de la figure d'arrivée. On rappelle les formules des aires de quelque figure.

Figure	Carré de côté c	Rectangle de longueur l et largeur L	Cercle de rayon r
Formule	c^2	$l \times L$	$2 \times \pi \times r^2$

1. Si on change un carré de côté 5 cm d'un rapport $k = 2$ alors l'aire du nouveau carré sera de ?
2. De manière générale, si on change un carré de côté c cm d'un rapport k alors l'aire du nouveau carré sera de ?
3. Compléter le tableau de proportionnalité.

Aire du carré de côté c	
Aire du nouveau carré	

4. Faire pareil pour le rectangle et le cercle.

Aire du rectangle de longueur l et de largeur L	
Aire du nouveau rectangle	

Aire du cercle de rayon r	
Aire du nouveau cercle	

5. **Leçon.** Formuler une propriété sur le changement de l'aire quand on change une figure par un rapport k.

Propriété (admis). *Soit $\mathscr{F}$ une figure du plan dont l'aire est $\mathscr{A}$. Si on agrandi ou réduit $\mathscr{F}$ alors la nouvelle aire est égale à $k^2 \times \mathscr{A}$.*

Propriété (admis). *Soit $\mathscr{S}$ un solide de l'espace dont le volume est $\mathscr{V}$. Si on agrandi ou réduit $\mathscr{S}$ alors le nouveau volume est égale à $k^3 \times \mathscr{V}$.*

Exercice 2. Soit $\mathscr{F}$ un rectangle de longueur l cm et de largeur $L = 2$ cm. Soit $\mathscr{F}'$ un rectangle de longueur l' et largeur L' :

- ▶ une augmentation de $\mathscr{F}$ de rapport 3.
- ▶ d'aire $\mathscr{A}' = 54\text{cm}^2$.

1. Pour la figure $\mathscr{F}'$, montrer que $L' = 6$ cm et ensuite montrer que $l' = 9$ cm.
2. Pour la figure $\mathscr{F}$, montrer de deux manières différentes que $l = 3$ cm.

Devoir 2. Soit $\mathscr{F}$ un carré de côté c cm. Soit $\mathscr{F}'$ un carré :

- ▶ une augmentation de $\mathscr{F}$ de rapport 2.
- ▶ d'aire $\mathscr{A}' = 36\text{cm}^2$.

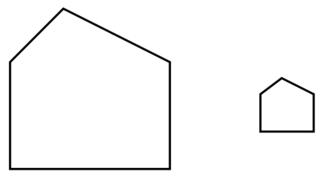
1. Montrer que l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{F}$ est
$$\mathscr{A} = 9\text{cm}^2$$
2. Conclure que $\mathscr{F}$ est un carré de côté $c = 3$ cm.

Fin de la deuxième séance.

Les liens établis entre les longueurs, les aires et le rapport sont importants pour la résolution de problèmes.

2.2.3 Problèmes

Exercice 3 (calcul)**.** Le polygone 2 est un agrandissement du polygone 1. Le coefficient de cet agrandissement est 2,5. L'aire du polygone 1 est égale à $7,5\text{cm}^2$.



La figure n'est pas à l'échelle.

1. Calculer l'aire du polygone 2.

Exercice 4 (calcul)**.** Soit $\mathscr{T}$ un triangle équilatéral de côté $c = 14$. On augmente $\mathscr{T}$ par un rapport $k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Question.

1. Montrer que $k > 1$. On laissera k sous forme fractionnaire irréductible.
2. Calculer la nouvelle longueur de $\mathscr{T}$.
3. Calculer la nouvelle aire de $\mathscr{T}$.

Exercice 5 (chercher, raisonner)**.** Une photo de dimension rectangulaire 20 cm x 25 cm est réduite pour entrer dans un cadre de 4 cm de large.

1. Quelle sera la nouvelle longueur ? Justifier rigoureusement avec un dessin, des calculs,..

Exercice 6 (calcul, communiquer)**.** Soit $\mathscr{F}$ un carré de côté $c = 123456789$. On applique le protocole suivant :

1. une augmentation de $\mathscr{F}$ de rapport $k = 2$.
2. une réduction de cette nouvelle figure de rapport $k = \frac{1}{2}$.
3. une réduction de cette nouvelle figure de rapport $k = \frac{1}{3}$.
4. une augmentation de cette nouvelle figure de rapport $k = 3$.

Question.

1. Montrer que la figure finale est identique à celle du départ.

Exercice 7 (chercher, raisonner)**.** Une photo de dimension 10 cm x 10 cm est réduite pour entrer dans un cadre de 2 cm de large.

1. Quelle sera la nouvelle longueur ? Justifier rigoureusement avec un dessin, des calculs,..

2.2.4 Examen

Exercice 1 (calcul)**.** Soit $\mathscr{T}$ un triangle équilatéral de côté $c = 987654321$. On agrandie $\mathscr{T}$ par un rapport $k = \frac{1}{5} + \frac{24}{5}$.

Question(s).

1. (/2.5) Calculer la nouvelle longueur de $\mathscr{T}$.
2. (/2.5) Calculer la nouvelle aire de $\mathscr{T}$.

Exercice 2 (calcul, communiquer)**.** Soit $\mathscr{F}$ un carré de côté $c = 123456789$. On applique le protocole suivant :

1. une augmentation de $\mathscr{F}$ de rapport $k = 2$.
2. une réduction de cette augmentation de rapport $k = \frac{1}{2}$.

Question.

1. (/5) Montrer que la figure finale est identique à celle du départ.

Exercice 3 (chercher, raisonner, représenter, communiquer)**.** Une photo de 10 cm x 15 cm est réduite pour entrer dans un cadre de 4 cm de large.

Question.

1. (/5) Quelle sera la nouvelle longueur ? Justifier rigoureusement avec un dessin, des calculs,..

Exercice 4 (chercher, raisonner)**.** La Statue de la Liberté à New York, d'une hauteur (hors socle) de 46 m, a été conçue par le sculpteur français A. Bartholdi (1834-1904). Une œuvre d'essai est située sur l'île aux Cygnes, à Paris ; sa hauteur est 11,50 m.

Questions.

1. (/2.5) Quel est le coefficient de réduction ?

   La masse d'une statue est liée au volume des matériaux utilisés. Pour la statue de la Liberté new-yorkaise, il a fallu 225 tonnes de matériaux ; pour la réplique française, 14 tonnes.

2. (/2.5) La statue française est-elle une parfaite réduction de sa grande sœur new-yorkaise ?

Fin de l'examen 8

2.3 Statistiques

Pour prendre des décisions devant des phénomènes difficilement maîtrisables, on effectue une enquête pour obtenir des données et les étudier. Les statistiques fournissent des indicateurs permettant de comprendre un phénomène pour prendre une décision sur une problématique donnée.

2.3.1 Rappels

Rappelons d'abord les éléments de la statistique.

Objectif(s) d'enseignement. Représentations graphiques, le calcul, en particulier celui des effectifs et des fréquences, et l'interprétation des indicateurs de position est poursuivi.

Pré-requis. Calculs élémentaires. Nombres entiers. Nombres décimaux.

Apprentissage. Pour faire une analyse statistique, on construit un tableau appelé tableau de statistique.

Longueurs (en m)	30	40	50	55	60	70	80	Total
Effectifs	5	6	8	7	2	5	6	39
Effectifs cumulés	5	11	19	26	28	33	39	
Fréquences	$\frac{5}{39}$	$\frac{6}{39}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{7}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{5}{39}$	$\frac{6}{39}$	1
Fréquences cumulées	$\frac{5}{39}$	$\frac{11}{39}$	$\frac{19}{39}$	$\frac{26}{39}$	$\frac{28}{39}$	$\frac{33}{39}$	1	

Activité de recherche 1. Un professeur de mathématiques a demandé à ses élèves de 4ème combien de minutes par jour ils passent en moyenne sur leur téléphone portable. Il a relevé les réponses de 39 élèves.

Temps (en min)	150	160	165	170	180	190	200	210	220	240	Total
Effectifs	2	3	4	4	5	7	6	5	2	1	
Effectifs cumulés											
Fréquences											
Fréquences cumulées											

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. Combien d'élèves passent moins de 180 min sur leur téléphone portable ? Justifier. A quelle fréquence cela correspond ?
3. **Leçon.** Rappeler ce que c'est qu'un effectif, un effectif cumulé, fréquence et fréquence cumulé.

Définition. Une série de données statistiques est une collection de données.
La population est l'ensemble des données étudiées.
Le caractère étudié est la masse des téléphones portables.

Dans ce cours, nous étudierons essentiellement des statistiques à un seul caractère : la taille de personnes, la couleur d'une voiture, etc. D'autres problématiques, plus complexe, mettent en jeu deux caractères qui sont relativement moins simples.

Définition. L'effectif d'une valeur du caractère est le nombre de caractère qui se répète dans la série statistique.
L'effectif total de la série est la somme de tous les effectifs.

Définition. La fréquence d'une valeur est le quotient de son effectif par l'effectif total.

Exercice 1. On relève le nombre de buts marqués par une équipe de football lors de ses 15 derniers matchs.

Nombre de buts	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Effectifs	5	3	2	1	0	1	0	1	1	1	
Effectifs cumulés											
Fréquences											
Fréquences cumulées											

1. Compléter le tableau ci-dessus.

Devoir 1. On demande aux élèves de mesurer la taille des arbres dans un jardin sur Moorea.

Taille (en cm)	[100; 150[	[150; 200[	[200; 250[	[250; 300[	[300; 350[	[350; 400[	[400; 450[	[450;
Effectifs	2	2	4	4	1	2	0	5
Effectifs cumulés								
Fréquences								
Fréquences cumulées								

1. Calculer les effectifs cumulés, les fréquences et fréquences cumulées.

Fin de la première séance.

Une grande partie des études réalisées doivent faire l'objet d'étude graphique et numérique.

2.3.2 Médiane

La moyenne vous est particulièrement familière : moyenne générale, moyenne des effectifs, etc. Cette année introduit une notion qui est confondu avec elle : la médiane.

Objectif(s) d'enseignement. Définir la médiane.

Pré-requis. Représentations graphiques, le calcul, en particulier celui des effectifs et des fréquences, et l'interprétation des indicateurs de position est poursuivi.

Apprentissage. Pour repérer le milieu d'une liste de nombres, on trie les éléments de la liste dans l'ordre croissant. Ensuite, on repère le milieu de cette liste.

Etude de la taille (en cm) d'un groupe de 5 élèves

Données	160	178	155	120	190
Données triées	120	155	160	178	190

Point milieu : 160 cm

Etude du poids (en kg) d'un groupe de 6 élèves

Données	66	55	50	55	89	78
Données triées	50	55	55	66	78	89

Point milieu : $\frac{66+55}{2} = 60{,}5\ kg$

Activité de recherche 2. Le collège de Moorea réalise une étude de la taille des cocotiers à la plage de Temae.

Taille (en cm)	210	255	240	235	213	310	280

1. Quelle est le point milieu de ce tableau ?
2. **Leçon.** Qu'est ce que le point milieu ? Comment le repérer ?

Définition. La médiane d'un échantillon est le point qui sépare l'échantillon en deux parties équitables.

Remarque. *La médiane est différent de la moyenne.*

La médiane fournit le point qui permet de séparer un échantillon en deux parties égales tandis que la moyenne fournit la tendance du caractère. Ce sont deux indicateurs qui s'interprètent différemment.

Exercice 2. Le collège de Moorea réalise une étude de la taille de cocotier de la plage de Tiahura.

Taille (en cm)	310	355	240	235	213	310	280

1. Déterminer la médiane de cet échantillon.
2. Déterminer la moyenne de cet échantillon.

Devoir 2. Uratini réalise une étude de ses notes au cours du trimestre 1. Il obtient :
— une moyenne de 15,5 sur 20.
— une médiane de 10.

1. Interpréter la moyenne et la médiane.

   Pour avoir la mention très bien, il faut une moyenne de 17 sur 20. Uratini fera un autre examen dans les jours qui vient.

2. Peut-il avoir la mention très bien ? Justifier votre réponse.

Fin de la deuxième séance.

Une grande partie des études réalisées doivent faire l'objet d'étude graphique et numérique.

2.3.3 Problèmes

Exercice 3 (DNB 2024)**.** L'association sportive d'un collège propose aux élèves une activité escalade. La feuille de calcul ci-dessous obtenue à l'aide d'un tableur indique la répartition par âge des élèves inscrits à l'escalade.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Âge	10	11	12	13	14	15	Total
2	Effectif	1	3	8	12	4	2	

1. Quel est le nombre d'élèves âgés de 12 ans inscrits à l'escalade ?
2. Calculer le nombre total d'élèves inscrits à l'escalade.
3. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule `H2` pour obtenir le nombre total d'élèves inscrits à l'escalade ?
4. Le professeur affirme : « 15 des élèves inscrits à l'escalade ont 14 ans ou plus ». A-t-il raison ?
5. L'année dernière, la moyenne des âges des élèves inscrits à l'escalade était de 13 ans.
6. La moyenne des âges des élèves inscrits à l'escalade cette année a-t-elle augmenté par rapport à l'année dernière ?
7. L'association prévoit une hausse de 10 % des inscriptions à l'escalade l'année prochaine.

8. Déterminer le nombre d'élèves qui seront inscrits à l'escalade l'année prochaine

Exercice 4 (DNB 2024)**.** On a relevé dans une feuille de calcul les températures maximales Tmax (en °C) atteintes à Strasbourg le 25 juin de chaque année de 2010 à 2018 (source : `meteociel.fr`).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
2	Tmax	29	23,1	22,6	17,4	23,4	25,7	25,2	26	24
3										
4	Moyenne									
5	Médiane	24								
6	Étendue	11,6								

On a oublié de calculer la moyenne de cette série.

1. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule `B4` pour que ce calcul soit effectué ?
2. Donner, sans détailler les calculs, une valeur approchée au degré Celsius près de la moyenne de la série.
3. Donner une interprétation de la médiane de cette série.

   Pour cette question seulement, on considère la série des températures maximales atteintes à Strasbourg le 25 juin de chaque année de 2010 à 2019. On sait que l'étendue des températures de cette nouvelle série est égale à 18,5° C.

4. Déterminer la température maximale atteinte à Strasbourg le 25 juin 2019.

Exercice 5. Le collège de Moorea réalise une étude de la taille des Tiare de la plage de Tiahura.

Taille (en cm)	3	3	2	5	2	3	8

1. Déterminer la médiane de cet échantillon.
2. Déterminer la moyenne de cet échantillon.

Exercice 6. On note les notes obtenues à un contrôle par 6 élèves :

$$12 ; 15 ; 8 ; 10 ; 15 ; 20$$

1. Calculer la moyenne de ces notes.
2. Calculer la médiane de cette série.
3. La moyenne et la médiane sont-elles identiques ?

Fin de séquence

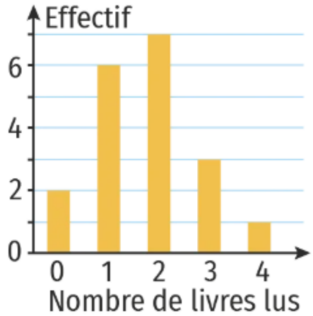
2.3.4 Examen

Exercice 1. On note les notes obtenues à un contrôle par 6 élèves :

$$12 ; 15 ; 8 ; 10 ; 15 ; 20$$

1. (/2.5) Calculer la moyenne de ces notes.
2. (/2.5) Calculer la médiane de cette série.

Exercice 2. Le diagramme ci-dessous représente le nombre de livres lus pendant les vacances pour les élèves d'un club de lecture d'un collège.



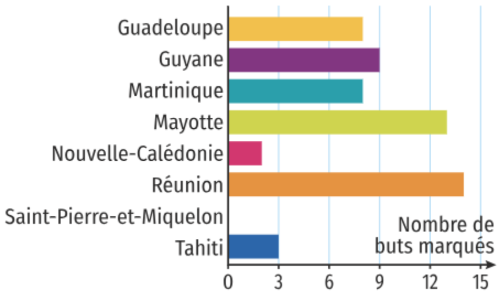
1. (/2.5) Combien d'élèves sont présents au total au club de lecture ? Justifier.
2. (/2.5) Déterminer la fréquence des élèves du club n'ayant lu aucun livre. Justifier.

Exercice 3. On demande à 25 élèves combien de temps ils passent par jour sur les réseaux sociaux.

Interv. de tps[1] (en min)	$[100; 150[$	$[150; 200[$	$[200; 250[$	$[250; 300[$	Total
Effectif	4	7	9	5	
Effectif cumulé					
Fréquence					
Fréquence cumulée					

1. (/5) Compléter le tableau ci-dessus.

Exercice 4. Le diagramme en bâtons suivant nous renseigne sur le nombre de buts marqués lors de la seconde édition de la coupe de l'Outre-Mer de football en 2010.



1. (/1) Combien de buts a marqué l'équipe de Mayotte ?
2. (/1) Quelle équipe a marqué le plus de buts ?
3. (/1) Quelles équipes ont marqué strictement moins de neuf buts ?
4. (/2) Quelles équipes ont marqué au moins dix buts ?

Fin de l'examen 9

2.4 Triangles semblables

Il existe des formes qui se ressemblent, mais qui ne sont pas forcément de la même taille : une photo affichée sur un grand écran et la même photo réduite dans un coin d'un téléphone ont exactement la même forme, mais pas la même dimension. En mathématiques, on dit que ces figures sont semblables : elles ont la même forme mais pas forcément la même taille.

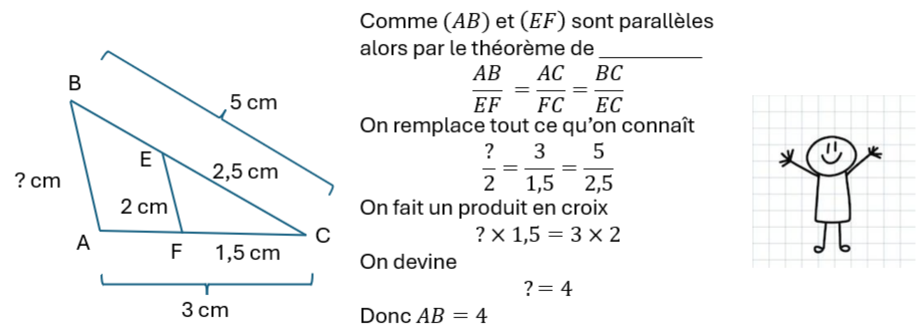
2.4.1 Caractérisation des triangles semblables

Pour commencer, nous allons introduire la notion avec des triangles car tout polygone peut être décomposer en triangle [1]. Aussi, nous allons introduire le calcul de longueurs qui est fourni par le théorème de Thalès.

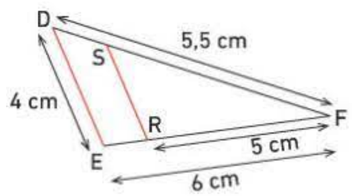
Objectif(s) d'enseignement. Formuler le théorème de Thalès.

Pré-requis. Proportionnalité. Fractions. Nombres décimaux. Nombres entiers.

> **Apprentissage.** Comme le théorème de Pythagore, l'application du théorème de Thalès nécessite une rédaction rigoureuse.



Activité de recherche 1. Dans la configuration suivante, (DE) et (SR) sont parallèles et D, S, F et E, R, F sont alignés dans cet ordre.

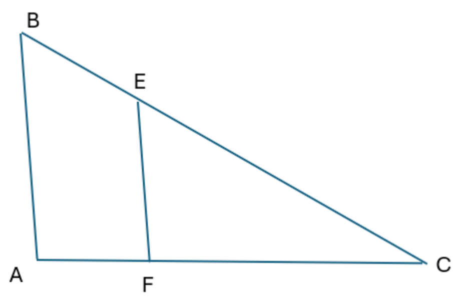


1. Peut-on calculer SR ? Justifier.
2. Calculer SR si on peut.
3. **Leçon.** Énoncé le théorème de Thalès.

Définition. On appelle triangle semblable deux triangles ayant leur angle deux à deux égales.

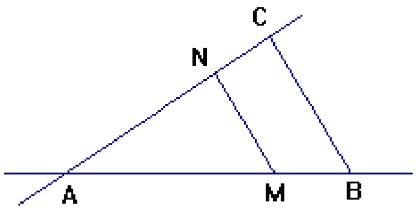
Théorème (Thalès, admis)**.** *Soient A, F, C et B, E, C alignés dans cet ordre. Si (AB) et (EF) sont parallèles alors*

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{EC} = \frac{AC}{FC}$$



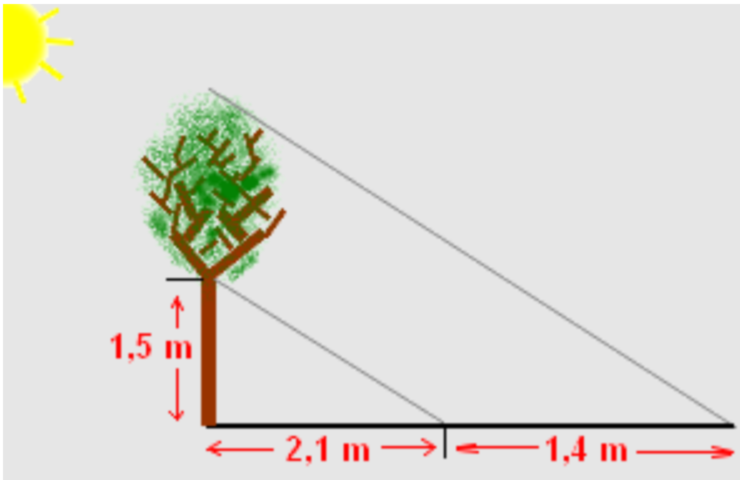
Le théorème de Thalès est importante pour déterminer des longueurs

Exercice 1. Dans la configuration ci-dessous avec (MN) et (BC) parallèles, $AB = 10$ cm ; $AC = 8$ cm ; $BC = 6$ cm ; $AM = 7$ cm.



1. Écrire ces longueurs sur la figure.
2. Calculer AN et MN.

Devoir 1. Dans la configuration ci-dessous :



1. Calculer la hauteur de l'arbre. Arrondir le résultat au centième.

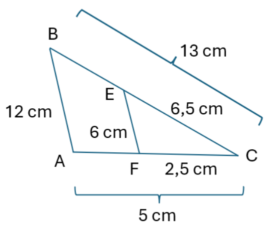
Fin de la première séance.

Nous verrons par la suite que ce théorème reste vrai dans le sens contraire.

Objectif(s) d'enseignement. Formuler la réciproque du théorème de Thalès.

Pré-requis. Proportionnalité. Fractions. Nombres décimaux. Nombres entiers.

> **Apprentissage.** Comme le théorème de Thalès, une rédaction rigoureuse est fortement recommandée.



On calcule

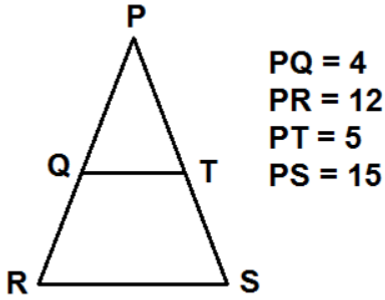
$$\frac{AB}{EF} = \frac{12}{6} = 2$$
$$\frac{AC}{FC} = \frac{5}{2,5} = 2$$
$$\frac{BC}{EC} = \frac{13}{6,5} = 2$$

Comme

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{FC} = \frac{BC}{EC}$$

Alors, par le théorème de ________ les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Activité de recherche 2. Soient les points P, Q, R et P, T, S alignés dans cet ordre. Dans la configuration suivante :

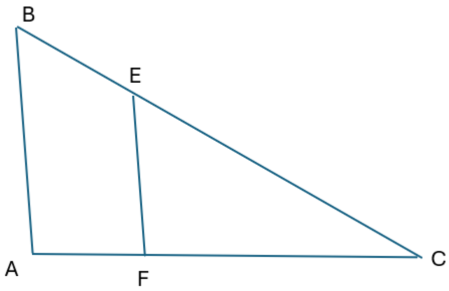


1. (QT) et (RS) sont-elles parallèles ? Justifier.
2. **Leçon.** Formuler la réciproque du théorème de Thalès.

Théorème (Thalès, admis)**.** *Soient A, F, C et B, E, C alignés dans cet ordre. Si*

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{EC} = \frac{AC}{FC}$$

alors (AB) et (EF) sont parallèles.

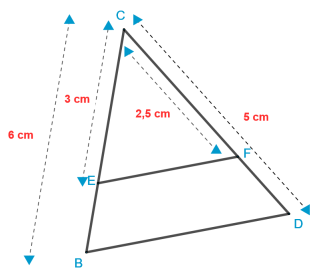


Remarque. *En pratique, il suffit de vérifier qu'une seule égalité.*

Comme le théorème de Pythagore, dont on fait allusion à la réciproque du théorème de Pythagore précisément [2], l'observation ne suffit pas. Ce n'est pas parce que deux droites semblent parallèles visuellement que c'est réellement le cas. Pour surmonter cet obstacle d'observation, le théorème de Thalès est une solution.

Exercice 2. Dans la configuration ci-dessous, on a

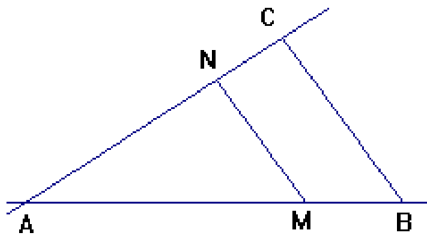
— C, E, B et C, F, D sont alignés dans cet ordre.



2. Dans ce cours, nous confondrons « réciproque de Pythagore » avec « théorème de Pythagore ». Mathématiquement, cela ne porte pas d'erreur tant que nous mentionnons correctement l'auteur de ce théorème. Les théorèmes de Thalès et de Pythagore sont <u>différents</u> !

1. Montrer que (EF) et (BD) sont parallèles.

Devoir 2. Dans la configuration suivante $AB = 11$ cm, $AM = 7$ cm, $AC = 13,2$ cm et $AN = 8,4$ cm.

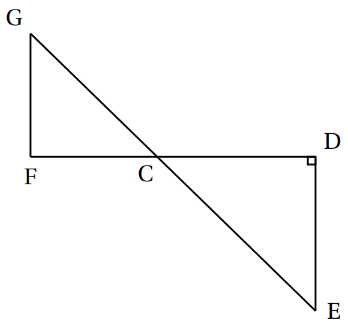


1. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Fin de la seconde séance.
Prenez la peine de faire les exercices en problèmes.

2.4.2 Problèmes

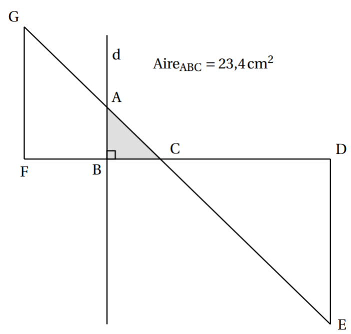
Exercice 3 (DNB 2025)**.** Dans la figure ci-contre qui n'est pas représentée en vraie grandeur :



- Les points G, C et E sont alignés;
- Les points F, C et D sont alignés;
- Les droites (GF) et (DE) sont parallèles.
- Le triangle CDE est rectangle en D
- CD = 21,6 cm, CE = 29,1 cm, FC = 17,2 cm.

1. Montrer que la longueur DE est égale à $19,5$ cm.
2. Calculer l'aire du triangle CDE.
3. Calculer la longueur GF arrondie au millimètre près.

   On trace une droite (d) perpendiculaire à (FC) avec un logiciel de géométrie dynamique. La droite (d) coupe le segment $[GC]$ en A et le segment $[FC]$ en B. En affichant l'aire du triangle ABC à l'aide du logiciel, on obtient $23,4\text{cm}^2$.

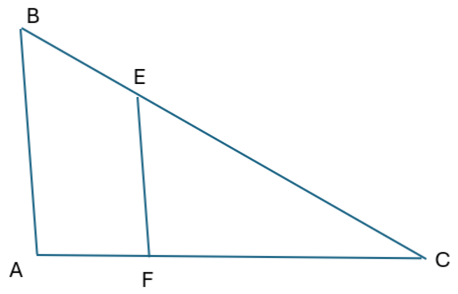


4. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{9}$ de l'aire du triangle CDE.

On admet que les triangles ABC et EDC sont semblables.

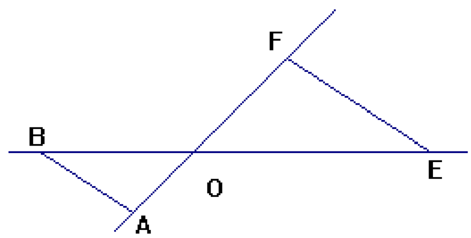
5. Déterminer la longueur AB.

Exercice 4 (démonstration générale)**.** Cette exercice consiste à démontrer le théorème de Thalès. Soient A, F, C et B, E, C alignés dans cet ordre. Ici, (AB) et (EF) sont parallèles.



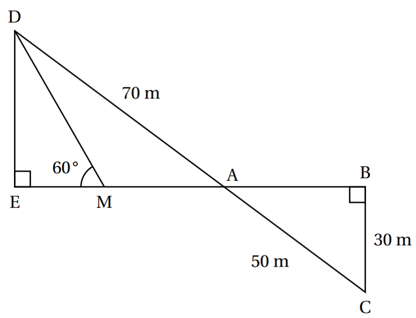
1. En utilisant la notion d'agrandissement, montrer qu'il existe $k > 0$ avec $AC = k \times FC$
2. En utilisant la notion d'agrandissement, montrer qu'il existe $l > 0$ avec $BC = l \times EC$

Exercice 5. Dans la configuration suivante avec (EF) et (AB) parallèles, $OF = 5$ cm ; $OE = 10$ cm ; $EF = 8$ cm et $OA = 2$ cm.



1. Écrire ces longueurs sur la figure.
2. Calculer OB et AB.

Exercice 6 (DNB 2025)**.** Dans la figure (non à l'échelle) ci-dessous.

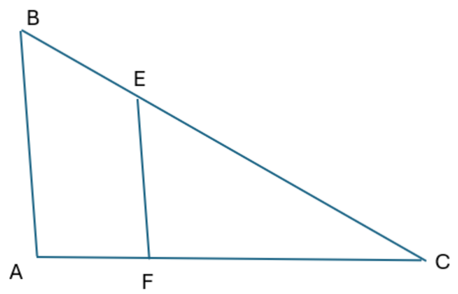


- Les points A, B, E et M sont alignés
- Les points A, C et D sont alignés
- ADE est un triangle rectangle en E
- ABC est un triangle rectangle en B
- AD = 70 m
- BC = 30 m
- AC = 50 m
- $\widehat{DME} = 60°$

1. Calculer la longueur AB.
2. Sans utiliser le théorème de Thalès, montrer que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
3. Montrer que la longueur DE est égale à 42 m.

2.4.3 Examen

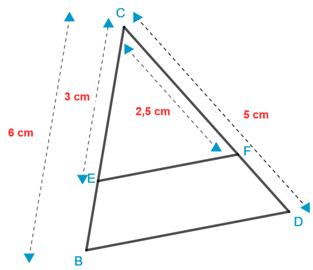
Exercice 1 (démonstration générale)**.** Cette exercice consiste à démontrer le théorème de Thalès. Soient A, F, C et B, E, C alignés dans cet ordre. Ici, (AB) et (EF) sont parallèles.



1. (/2) En utilisant la notion d'agrandissement, montrer qu'il existe $k > 0$ avec $AC = k \times FC$
2. (/2) En utilisant la notion d'agrandissement, montrer qu'il existe $l > 0$ avec $BC = l \times EC$
3. (/1) Conclure.

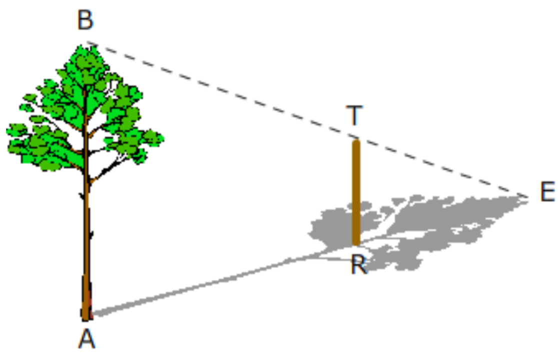
Exercice 2. Dans la configuration ci-dessous, on a

— C, E, B et C, F, D sont alignés dans cet ordre.



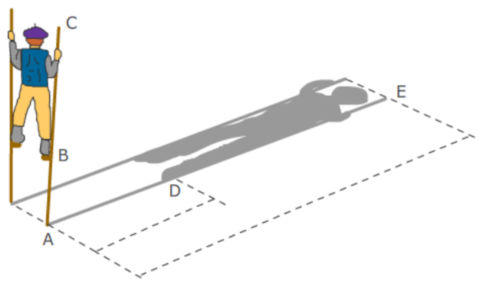
1. (/5) Montrer que (EF) et (BD) sont parallèles.

Exercice 3. Sur la figure l'arbre et le bâton sont parallèles. On donne $TR = 1,6$ m, $AE = 10$ m et $RE = 2,5$ m.



1. (/5) Calculer AB.

Exercice 4. On suppose que les rayons du soleil sont parallèles. Dans la configuration, on a $AB = 120$ cm ; $AD = 210$ cm ; $AE = 518$ cm.



1. (/5) Calculer BC.

Fin de l'examen 10

2.5 Fractions

Ce chapitre complète le chapitre traitant de l'additivité des fractions.

2.5.1 Multiplication et division

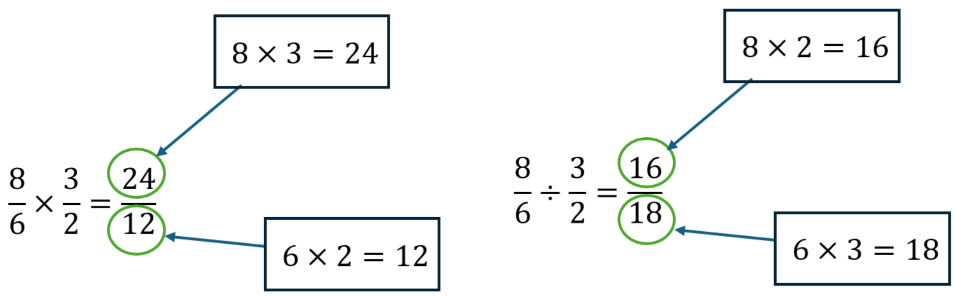
Nous étendons les résultats compris au chapitre sur l'additivité des fractions vers la multiplication. Même si cela semble fastidieux, il n'en est rien.

Objectif(s) d'enseignement. Savoir comment multiplier deux fractions.

Pré-requis. Fractions. Nombres entiers.

Apprentissage. Multiplions et divisons

$$\frac{8}{6} \text{ et } \frac{3}{2}$$



Activité de recherche 1. On a $\frac{3}{4}$ de litre de jus d'orange. Chaque verre contient $\frac{1}{6}$ de litre.

1. Montrer qu'on peut remplir 4 verres entiers avec $\frac{3}{4}$ de litre de jus.
2. Conclure qu'il restera la moitié d'un verre.

Théorème (admis)**.** *Multiplier et diviser deux fractions donne une fraction.*

Méthode. Soient a, b, c, d avec $b, d \neq 0$ alors

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \text{ et } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exercice 1. Un coureur parcourt $\frac{5}{6}$ de la longueur d'une piste de 400 m. Pendant l'entraînement, il ne fait que $\frac{3}{4}$ de ce trajet.

1. Montrer que le coureur parcourt 250 m.

Devoir 1. Pour préparer un gâteau, on a besoin de $\frac{3}{4}$ de litre de lait. Mais la recette que l'on souhaite réaliser correspond à $\frac{2}{5}$ de la recette originale.

1. Montrer qu'il faut $\frac{3}{10}$ de litre de lait à utiliser (soit 0,3 L).

Fin de la première séance.
Pour la suite, les problèmes traités sont analogues.

2.5.2 Problèmes

Exercice 2. Uratini a dessiner sur une feuille dont les dimensions sont de 29 x 12.4 cm. Sur l'ordinateur, il va réduire les dimensions du dessin par un rapport de $\frac{1}{3}$.

1. Quelles sont les nouvelles dimensions ? Justifier.

Exercice 3 ([2])**.** Turiana a un morceau de ficelle de $\frac{1}{2}$ m de long. Elle en utilise $\frac{1}{3}$ pour fermer un paquet.

1. Quelle longueur de ficelle Turiana a-t-elle utilisée pour son paquet ?

Exercice 4 ([2])**.** George dispose de $\frac{3}{4}$ L d'huile. Il en utilise $\frac{2}{5}$ pour faire frire des crevettes.

1. Quelle quantité d'huile a-t-il utilisée ?

Exercice 5. Calculer

$$1 \times \frac{(-1)}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{(-1)}{4} \times \frac{1}{5}$$

Exercice 6 ([2])**.** Calculer l'aire d'un rectangle mesurant $\frac{5}{8}$ m de par $\frac{3}{5}$ m.

2.5.3 Examen

Exercice 1. (/5) Calculer

$$1 \times \frac{(-1)}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{(-1)}{4} \times \frac{1}{5}$$

Exercice 2. Un nageur parcourt $\frac{5}{6}$ de kilomètre. Chaque longueur de piscine mesure $\frac{1}{25}$ de kilomètre.

1. (/2.5) Montrer que le nageur a fait 20 longueurs entières.
2. (/2.5) Conclure qu'il lui resterait $\frac{5}{6}$ d'une longueur à finir.

Exercice 3. (/5) Calculer l'aire d'un rectangle mesurant $\frac{6}{9}$ m de par $\frac{4}{6}$ m.

Exercice 4. A 15h00, Uratini sort un disque de glace du congélateur de 5 cm de rayon. Chaque minute, le disque fond et perd $\frac{1}{8}$ de son rayon.

1. (/0.5) Quel est le rayon du disque à 15h01 ? Justifier.
2. (/2) Remplir le tableau en justifiant vos calculs.

Heure	15h00	15h01	15h02	15h04
Rayon du disque				

On dira que le disque aura totalement fondu si son rayon est inférieur strictement à $0,002$.

3. (/2.5) A quelle heure le disque aura totalement fondu ? Justifier.

Fin de l'examen 11

Chapitre 3

Troisième trimestre

Ce dernier volet achève les notions vues précédemment et mêlent une plus grande diversité de thématiques : analyse, algèbre, géométrie et probabilité.

3.1 Cosinus

Dans notre vie quotidienne, nous rencontrons souvent des situations où il faut calculer une distance ou une hauteur sans pouvoir la mesurer directement : mesurer la largeur d'une rivière sans la traverser ou connaître la hauteur d'un bâtiment. Pour résoudre ces problèmes, le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès ne suffisent plus, nous allons découvrir une nouvelle notion : le cosinus.

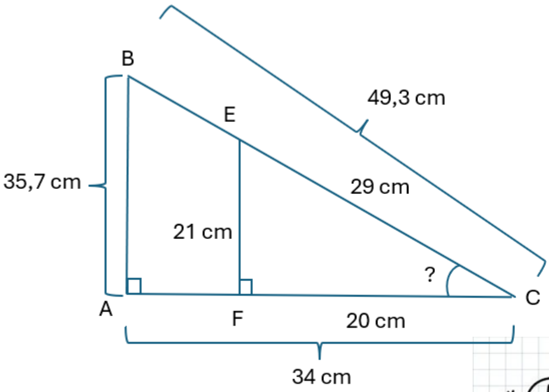
3.1.1 Cosinus

Le cosinus permet de relier un angle d'un triangle rectangle avec les longueurs de ses côtés. C'est donc un nouvel outil puissant pour faire des calculs de distances et d'angles dans les figures géométriques.

Objectif(s) d'enseignement. Définir le cosinus d'un angle.

Pré-requis. Multiples et diviseurs. Proportionnalité.

Apprentissage. On cherche une manière de définir le cosinus d'un angle en fonction des longueurs d'un triangle rectangle.



Triangle	ABC	EFC
Hypoténuse	BC=49,3	EF=29
Côté adjacent	AC=34	FC=20

X 0,69

Pour voir si les longueurs sont proportionnelles on fait un tableau.
On obtient
$$hypothenuse \times 0{,}69 = cote\ adjacent$$

$$\cos\widehat{ACB} = 0{,}69$$
$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \cos^{-1}(0{,}69) = 46{,}37°$$

De cette manière, on voit même que le cosinus d'un angle est indépendant de la longueur du côté sur lequel on se trouve sur ce côté. Formellement, l'argument mathématique vient du fait que les triangles ABC et EFC sont semblables.

Activité de recherche 1. En continuant avec l'exemple ci-dessus.

Triangle	ABC	EFC
Hypoténuse	BC = ...	EC = ...
Côté opposé	AB = ...	EF = ...

X ....

$\cos\widehat{ACB} = 0{,}69$	
$\sin\widehat{ACB} = 0{,}72$	
$\tan\widehat{ACB} = 1{,}05$	

Triangle	ABC	EFC
Côté opposé		
Côté adjacent		

X ....

Triangle	ABC	EFC
Hypoténuse	BC=49,3	EC=29
Côté adjacent	AC=34	FC=20

X 0,69

1. Relier les cases du tableau de gauche avec le tableau de droite approprié.
2. **Leçon.** Formuler le cosinus, le sinus et la tangente.

Définition. On appelle cosinus d'angle α le coefficient de proportionnalité du côté adjacent par l'hypoténuse.

Soit ABC un triangle rectangle en B alors

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} \in]0;1[$$

Définition. On appelle sinus d'angle α le coefficient de proportionnalité du côté opposé par l'hypoténuse.

Soit ABC un triangle rectangle en B alors

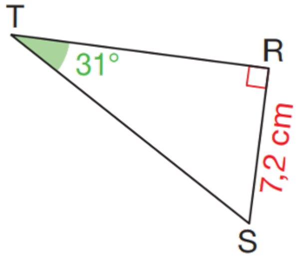
$$\sin \alpha = \frac{CB}{AC}$$

Définition. On appelle tangente d'angle α le coefficient de proportionnalité du côté opposé par le côté adjacent.

Soit ABC un triangle rectangle en B alors

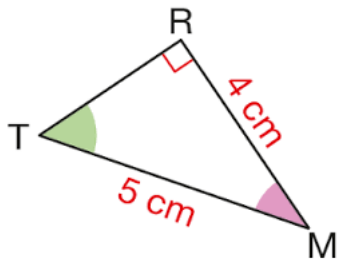
$$\tan \alpha = \frac{CB}{AB}$$

Exercice 1. Dans la configuration ci-dessous.



1. Calculer TR et TS.

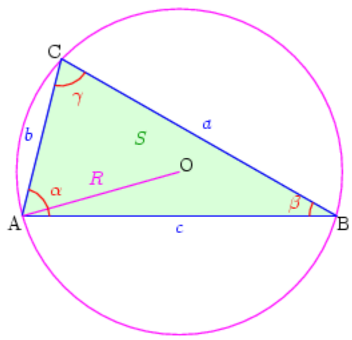
Devoir 1. Dans la configuration ci-dessous, calculer les angles.



Fin de la première séance.

3.1.2 Problèmes

Exercice 2 (loi des sinus)**.** *Dans la configuration ci-dessous.*



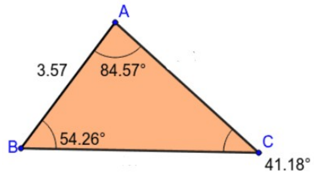
1. Montrer que

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}}$$

2. Montrer que

$$\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}}$$

Exercice 3. *Dans la configuration ci-dessous.*

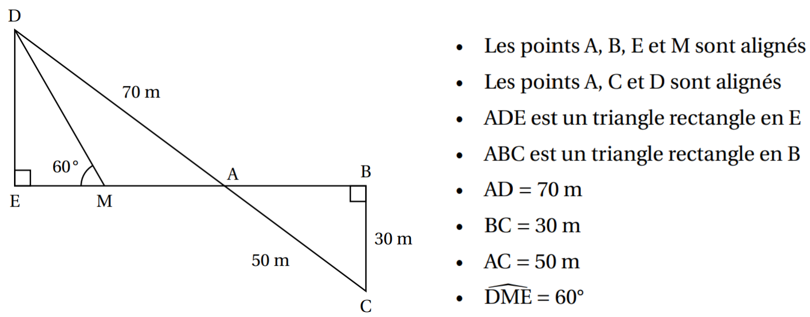


1. Calculer AC avec la loi des sinus.
2. Calculer BC avec la loi des sinus.

Exercice 4 (Pythagore)**.** *Soit ABC un triangle rectangle en A. Montrer que*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Exercice 5 (DNB 2025)**.** Dans la figure (non à l'échelle) ci-dessous.



1. Calculer la longueur AB.
2. Montrer que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
3. Montrer que la longueur DE est égale à 42 m.
4. Montrer que la longueur EM est environ égale à $24,2$ m.
5. En déduire l'aire du triangle AMD.

Fin de la séquence 12

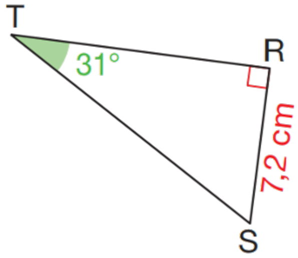
3.1.3 Examen

Pour cette évaluation, la rédaction est rigoureusement évaluée. Pensez à rédiger correctement, dans un français le plus lisible possible, en révélant bien : le théorème utilisé et pourquoi on peut l'utiliser.

Exercice 1 (Pythagore)**.** (/5) Soit ABC un triangle rectangle en A. Montrer que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Exercice 2. Dans la configuration ci-dessous.



1. (/2.5) Calculer TR.
2. (/2.5) Calculer TS.

Exercice 3. Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm.

1. (/2.5) Calculer $\widehat{ABC}$, arrondir le résultat au centième près.
2. (/2.5) Représenter le triangle en taille réelle.

Fin de l'examen 12

3.2 Probabilités

Dans la vie courante, rien ne peut garantir que demain il fera beau ou qu'à midi exactement on gagnera au loto. Ces phénomènes dépendent du hasard et cette notion, même si elle est comprise intuitivement, doit être maitrisée afin de pouvoir modéliser des phénomènes avec des modèles qui leur sont compatibles.

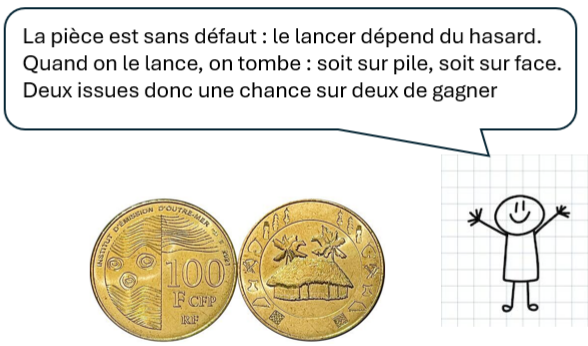
3.2.1 Expériences aléatoires et probabilités

Commençons d'abord par le début. Définissons la notion de hasard et les expériences qui en dépendent.

Objectif(s) d'enseignement. Définir la probabilité d'un événement d'une expérience aléatoire.

Pré-requis. Nombres décimaux. Notion de hasard. Dénombrement.

Apprentissage. On a une pièce de 100 CFP sans défaut. On le lance, si on tombe sur pile on gagne, sinon on perd.



Activité de recherche 1. On lance un dé à six faces sans défaut.

1. Est-ce que cette expérience dépend du hasard ? Justifier.
2. Donner les chances de tomber sur le numéro 5.
3. Donner les chances de tomber sur le numéro 2, 4 et 6.
4. Donner les chances de tomber sur le numéro 18.
5. D'après les réponses précédentes, quel événement a le plus de chance de se réaliser ? lequel a le moins de chance ? Justifier.
6. **Leçon.** Définir une expérience aléatoire, une issue, événement et probabilité.

Définition. On appelle expérience aléatoire toute expérience qui dépend du hasard.
On appelle issue d'une expérience aléatoire tout résultat généré par cette expérience.
On appelle événement d'une expérience aléatoire toute combinaison d'issue de cette expérience.

Définition. On appelle probabilité d'un événement A toute quantité entre 0 et 1 qui représente les chances que cet événement se réalise. On le note $\mathbb{P}(A)$.

Pour comprendre cette quantité, il faut le multiplier par 100. On obtient le pourcentage de chance que cet événement se réalise.

Remarque. *Plus la probabilité est proche de 1, plus cet événement à de chance de se réaliser. Plus il est proche de 0, plus cet événement à moins de chance de se réaliser.*

Définition. On appelle événement contraire de A l'événement noté $\overline{A}$ désignant toutes les issues qui ne sont pas contenues dans A.

Remarque. *Pour calculer l'événement contraire, il suffit de le soustraire la probabilité de l'événement initiale avec 1.*

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Les termes définis précédemment ne vous sont pas étranger. Il est important de les formaliser et de les poser sur écrit afin de travailler dans un cadre bien défini.

N'oubliez pas que, comme en géométrie, il est très conseillé de faire des schémas ou des dessins si le problème n'est pas clair. Au niveau du collège et sauf mention explicite du contraire, tous les problèmes peuvent être représentés sans soucis.

Exercice 1. On tire une boule dans une urne contenant :

- 2 boules rouges.
- 2 boules vertes.
- 1 boule noire.

1. Est-ce que cette expérience dépend du hasard ? Justifier.
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ? Justifier.
3. Quelle est la probabilité de tirer une boule verte ? Justifier.
4. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ? Justifier.

Devoir 1. On lance une fléchette sur une cible de forme circulaire de rayon $r = 3$ m. Sur elle, on place un disque rouge de forme circulaire de rayon $r' = 1$ m.

1. Est-ce que cette expérience dépend du hasard ? Justifier.
2. Quelle est la probabilité de toucher la cible ? Justifier.
3. Quelle est la probabilité de toucher le disque rouge ? Justifier.

Indication. Ne pas hésiter à faire un dessin.

Fin de la première séance.
La notion de probabilité est importante pour estimer de la réalisation d'un événement.

3.2.2 Problèmes

Exercice 2. Proposer une expérience aléatoire qui donne deux issues :

— une issue de probabilité 1.

— une autre issue de probabilité 0.

Exercice 3. On choisi un élève au hasard dans une classe de 25 élèves contenant :

- ▶ 10 élèves qui vivent à Haapiti.
- ▶ 10 élèves qui vivent à Temae.
- ▶ 5 élèves qui vivent sur Tahiti.

1. Est-ce que cette expérience dépend du hasard ? Justifier.
2. Quelle est la probabilité de choisir un élève qui habite à Temae ? Justifier.
3. Quelle est la probabilité de choisir un élève qui ne vit pas à Tahiti ? Justifier.

Exercice 4. Proposer une expérience aléatoire qui donne trois issues avec 100 % de réussite sur une issue et zéro sur les autres.

Exercice 5. L'expérience consiste à choisir un nombre dans la liste qui suit.

$$1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,11\,;\,12\,;\,13\,;\,14\,;\,15\,;\,16\,;\,17\,;\,18\,;\,19\,;\,20$$

1. Déterminer la probabilité de tomber sur un nombre premier.
2. Déterminer la probabilité de tomber sur un nombre pair.
3. Déterminer la probabilité de tomber sur un diviseur de 20.

3.2.3 Examen

Exercice 1. Toutes les boules dans ce problème sont sans défaut. On tire une boule dans une urne contenant :

- ▶ 5 boules rouges.
- ▶ 4 boules vertes.
- ▶ 1 boule noire.

1. (/1) Est-ce que cette expérience dépend du hasard ? Justifier.
2. (/1.5) Quelle est la probabilité de prendre une boule verte ? Justifier.
3. (/2.5) Quelle est la probabilité de prendre une boule dont la couleur est une couleur primaire. Justifier.

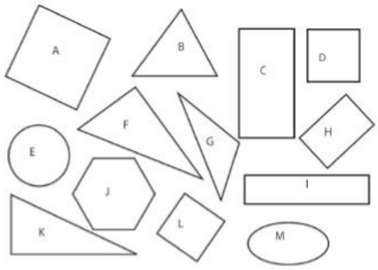
Indication. Une couleur primaire désigne soit le bleu, soit le jaune, soit le vert.

Exercice 2. On lance une fléchette sur une cible de forme circulaire de rayon $r = 10$ m. Sur elle, on place un disque rouge de forme circulaire de rayon $r' = 1.5$ m.

1. (/1) Est-ce que cette expérience dépend du hasard ? Justifier.
2. (/1.5) Quelle est la probabilité de toucher la cible ? Justifier.
3. (/2.5) Quelle est la probabilité de toucher le disque rouge ? Justifier.

Indication. Ne pas hésiter à faire un dessin.

Exercice 3. Dans la figure ci-dessous.



1. (/2) Quelle est la probabilité de tirer une figure à 4 côtés ? Justifier. On note A cette probabilité.
2. (/1) Quelle est la probabilité de tirer une figure à 3 côtés ? Justifier. On note B cette probabilité.
3. (/2) Comparer les probabilités A et B. A-t-on plus de chances de tirer une figure à 4 côtés ou une figure à 3 côtés ? Justifier.

Exercice 4. (/5) Proposer une expérience aléatoire qui donne deux issues :

— une issue de probabilité 1.

— une autre issue de probabilité 0.

Fin de l'examen 13

3.3 Puissances de 10

En sciences, en technologie ou même dans la vie courante, on rencontre souvent des nombres très grands ou très petits :

— La distance de la Terre au Soleil est d'environ 150 000 000 km.

— Le diamètre d'un cheveu est d'environ 0,00007 m.

— La population mondiale se compte en milliards d'habitants.

Écrire ou lire de tels nombres avec tous leurs zéros n'est ni pratique ni rapide. Pour simplifier leur écriture, on utilise les puissances de 10.

3.3.1 Puissances de 10 à exposant positif

Nous commençons par les puissances à exposant positif.

Objectif(s) d'enseignement. Définir la puissance 10 d'un nombre à exposant positif.

Pré-requis. Facteurs. Nombres entiers.

Apprentissage. Le tableau ci-dessous fourni l'écriture sous forme de puissance et de multiplication des différentes puissances de 10 à exposant positif.

Nombres	1	10	100	1 000	10 000	100 000
Formule	1	10	10×10	$10 \times 10 \times 10$	$10 \times 10 \times 10 \times 10$	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
Puissance	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5

Activité de recherche 1. Uratini a vu que le prix d'une maison à Temae est de 20 000 000 CFP.

1. Écrire ce nombre en utilisant les puissances de 10.
2. **Leçon.** Définir la puissance de 10 et son exposant n.

Soit $n > 0$ un entier.

Définition. On définit la puissance de 10 exposant n le nombre noté 10^n défini comme le produit de 10 à n facteurs.

$$10^n = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n\text{fois}}$$

Remarque. *Par convention,* $10^0 = 1$.

Exercice 1. On a 1 million = 1 000 000.

1. Écrire ce nombre en puissance de 10.
2. Combien de zéros y a-t-il dans 1 milliard (1 000 000 000) ?
3. Écrire 1 milliard en puissance de 10.

Devoir 1. On place 1 grain de riz sur la première case d'un échiquier, puis 10 grains sur la deuxième, 100 grains sur la troisième, et ainsi de suite (chaque fois 10 fois plus).

1. Combien y a-t-il de grains sur la 5ème case ?
2. Écrire le résultat en puissance de 10.

Fin de la première séance.
La notion de puissance 10 réside dans le fait que l'on facilite grandement l'écriture d'un nombre et sa lecture.

3.3.2 Puissances de 10 à exposant négatif

Continuons maintenant pour celles à exposant négatif.

Objectif(s) d'enseignement. Définir la puissance 10 d'un nombre à exposant négatif.

Pré-requis. Facteurs. Nombres entiers.

Apprentissage. Le tableau ci-dessous fourni l'écriture sous forme de puissance et de multiplication des différentes puissances de 10 à exposant négatif.

Nombres	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
Formule	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10 \times 10}$	$\frac{1}{10 \times 10 \times 10}$	$\frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10}$	$\frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}$
Puissance	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}

Activité de recherche 2. Au microscope, le diamètre d'une cellule est environ 0,00002 m.

1. Écrire ce nombre en utilisant les puissances de 10.
2. **Leçon.** Définir la puissance de 10 d'un nombre et son exposant $-n$

   Soit $n > 0$ un entier.

Définition. On définit la puissance de 10 exposant $-n$ le nombre noté 10^{-n} défini comme le produit de 10 à n facteurs.

$$10^{-n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n\text{fois}}}$$

Exercice 2. La longueur d'une bactérie est d'environ 0,000001 m.

1. Écrire ce nombre en puissance de 10.
2. Compare avec le centimètre (10^{-2} m). Quelle est la plus petite unité ?

Devoir 2. La masse d'un proton est environ 0,00000000000000000000000167 g.

1. Écris ce nombre en puissance de 10.
2. Compare-le avec 10^{-20}.

Fin de la deuxième séance.
Prenez la peine de faire le devoir pour la suite.

3.3.3 Notation scientifique

Les puissances de 10 d'exposant positif ou négatif permettent de représenter des nombres très grands plus simplement. On recours souvent à une notation plus simple pour la lecture des nombres et, surtout, pour pouvoir les comparer.

Objectif(s) d'enseignement. Définir la notation scientifique d'un nombre.

Pré-requis. Facteurs. Puissances de 10.

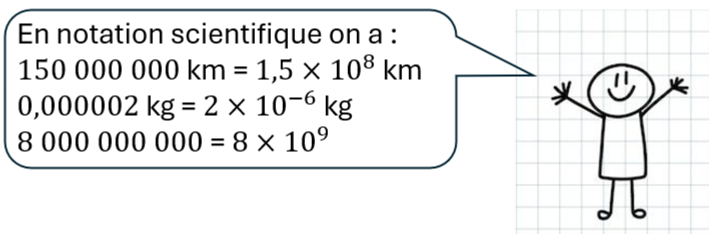
Apprentissage. En sciences, on rencontre souvent des nombres très grands ou très petits.

— Distance Terre - Soleil : 150 000 000 km

— Masse d'un moustique : 0,000002 kg

— Population mondiale : 8 000 000 000 habitants

Pour les noter scientifiquement, c'est :



Activité de recherche 3. La distance moyenne entre la Terre et la Lune est d'environ 384 000 km. La distance moyenne entre la Terre et le Soleil est d'environ 150 000 000 km.

1. Écrire ces distances en notation scientifique.

2. **Leçon.** Que remarques-tu sur la manière d'écrire ces nombres ? Comment place-t-on la virgule et la puissance de 10 ? Formuler une expression mathématique de la notation scientifique.

Définition. On appelle notation scientifique d'un nombre x toute écriture de x sous la forme
$$x = a \times 10^n$$
avec $a \in]-1;1[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

On dit souvent aussi notation scientifique ou encore écriture scientifique. Ne soyez pas déstabiliser de ces terminologies qui sont souvent utiliser.

Remarque. *Si on recule la virgule alors l'exposant est positif.*
Si on avance la virgule alors l'exposant est négatif.

Exercice 3. Appliquons directement cette notion.

1. Écris en écriture scientifique :
   - ▶ 25000
   - ▶ 0,00034
   - ▶ 9870000
2. Déduis les ordres de grandeur de ces nombres.

Devoir 3. La population de Tokyo est environ 37 000 000 habitants.

1. Écrire ce nombre en puissance de 10.
2. Écrire ce nombre en notation scientifique.

Fin de la troisième séance.
Prenez la peine de faire les exercices en problèmes.

3.3.4 Problèmes

Exercice 4. *Uratini participe à une course de 10 000 m.*

1. Donner la distance de la course en notation scientifique.

Giga	Méga	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli	µicro	nano
G	M	k	h	da		d	c	m	µ	n
10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^0 = 1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

2. A l'aide du tableau, donner cette distance en km en notation scientifique.

Exercice 5. *Uratini fait tomber sa montre dans la mer entre Moorea et Tahiti. Chaque seconde, la montre est tombée de 2,5 m.*

1. A quelle profondeur la montre est tombée au bout de 60 secondes ?
2. A quelle profondeur la montre est tombée au bout de 10 000 secondes ?

Giga	Méga	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli	µicro	nano
G	M	k	h	da		d	c	m	µ	n
10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^0 = 1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

3. A l'aide du tableau, donner cette profondeur en km en notation scientifique.

Exercice 6. *Montrer que la notation scientifique du nombre ci-dessous est environ de* 8×10^{53}.

808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000

Exercice 7. *Classer les distances suivantes par ordre de grandeur :*

1. Diamètre d'un poil humain : $d_1 = 175$ µm
2. Diamètre d'une molécule d'ADN : $d_2 = 2,2$ nm.
3. Taille d'un grain de sable : $d_3 = 0,025$ mm.
4. Taille d'un atome de carbone : $d_4 = 67$ pm.
5. Rayon de la Terre : $d_5 = 6\,371$ km.
6. Distance Terre-Lune : $d_6 = 384\,400$ km.

3.3.5 Examen

Exercice 1. (/5) Écrire le nombre ci-dessous sous forme scientifique

123 456 789

Exercice 2. La mémoire d'une clé USB est de 32 000 000 000 octets.

1. (/2.5) Écris ce nombre en puissance de 10.
2. (/2.5) Exprime-le en notation scientifique.

Exercice 3. *Uratini fait tomber sa montre dans la mer entre Moorea et Tahiti. Chaque seconde, la montre est tombée de 2,5 m.*

1. A quelle profondeur la montre est tombée au bout de 60 secondes ?
2. A quelle profondeur la montre est tombée au bout de 10 000 secondes ?

Giga	Méga	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli	µicro	nano
G	M	k	h	da		d	c	m	µ	n
10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^0 = 1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

3. A l'aide du tableau, donner cette profondeur en km en notation scientifique.

Exercice 4. *Comparer les ordres de grandeur des distances suivantes :*

1. $d_1 = 6\,400$ km.
2. $d_2 = 12\,050$ m.

Fin de l'examen 14

3.4 Transformations

Dans la vie quotidienne comme en mathématiques, on observe souvent des figures qui se répètent ou se déplacent sans changer de forme ni de taille : le motif d'un carrelage ou encore le reflet d'un objet dans un miroir. Ce sont des transformations qui ne changent pas les longueurs et les angles.

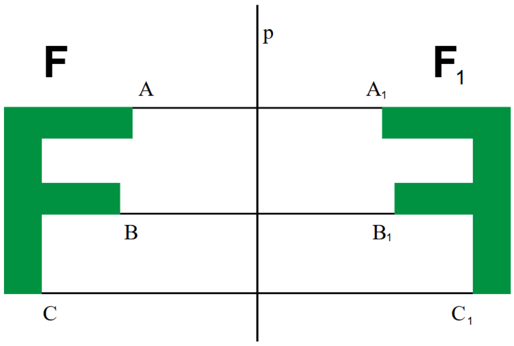
3.4.1 Symétrie

Commençons d'abord par les effets miroirs : les symétries.

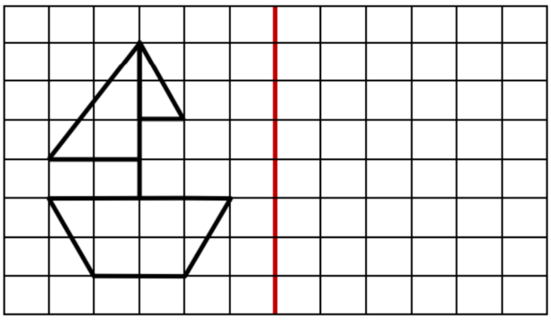
Objectif(s) d'enseignement. Définir une symétrie.

Pré-requis. Triangles.

Apprentissage. On fait réfléchir une figure en forme de « F » sur un miroir.



Activité de recherche 1. Dans la figure ci-dessous.



1. Reproduire le symétrique de la figure ci-dessous par rapport à l'axe.
2. **Leçon.** Formuler une définition pour une symétrie d'axe d.

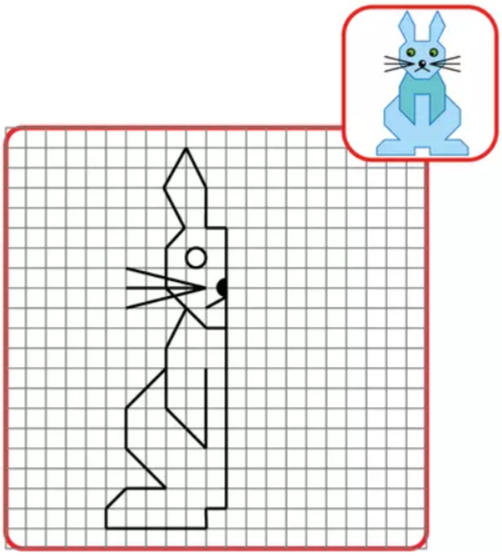
Soit $n > 0$ un entier.

Définition. On appelle symétrie d'une figure $\mathscr{F}$ par rapport à un axe d la figure dont les points sont placés à la même distance de l'axe, de l'autre côté.

Remarque. *La symétrie est un effet miroir.*

Propriété. *Soit $\mathscr{F}$ une figure dont $\mathscr{F}'$ est son symétrique par rapport à l'axe d alors d est la médiatrice de du segment formé de chaque point de $\mathscr{F}$ et son symétrique.*

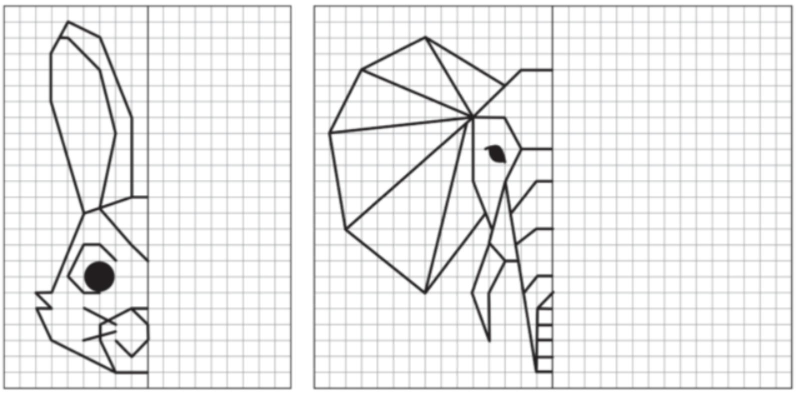
Exercice 1. Dans la figure ci-dessous.



1. Reproduire le symétrique de la figure ci-dessous par rapport à l'axe.

Comme vous pouvez le voir, les figures sont identiques. On ne distingue aucun changement sur les longueurs et les angles entre les côtés.

Devoir 1. Dessiner le symétrique de chaque figure par rapport à l'axe.



Fin de la première séance.
La notion de symétrie est comparable à un effet miroir. D'autres transformations sont comparables avec des choses de la vie courante. Il est cruciale d'en avoir suffisamment pour mémoriser ces transformations et ne pas les confondre.

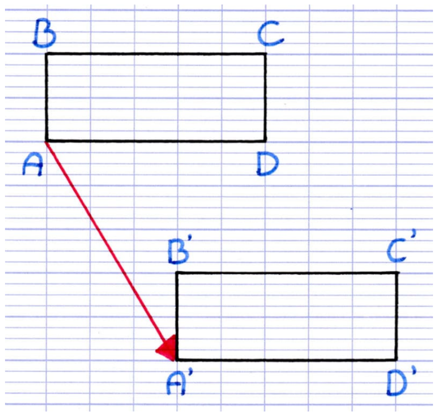
3.4.2 Translation

Maintenant, la translation.

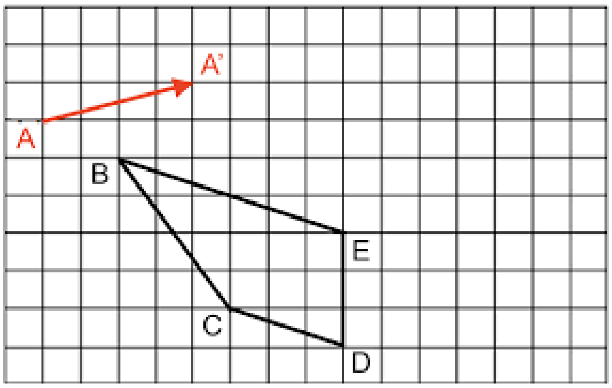
Objectif(s) d'enseignement. Définir la translation par rapport à une direction.

Pré-requis. Triangle.

Apprentissage. On translate un rectangle dans la direction donnée par « une flèche ».



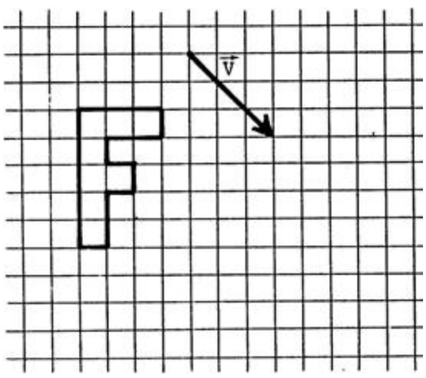
Activité de recherche 2. Dans la configuration suivante.



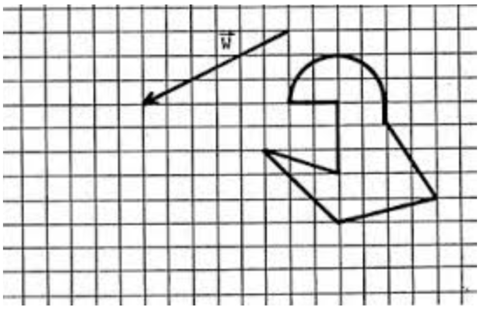
1. Dessiner la translation de la figure dans la direction donnée.
2. **Leçon.** Formuler une définition d'une translation dans une direction donnée.

Définition. On appelle translation d'une figure $\mathscr{F}$ dans une direction donnée le déplacement de chaque point de la figure vers la direction donnée.

Exercice 2. Tracer la translation dans la direction donnée de la figure suivante.



Devoir 2. Tracer la translation dans la direction donnée de la figure suivante.



Fin de la deuxième séance.
Les deux premières exemples sont relativement simples car ils sont présents dans la vie courante.

3.4.3 Rotation

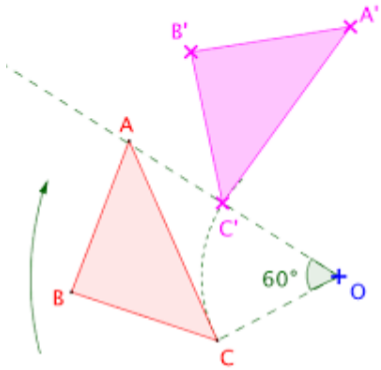
Terminons maintenant avec les rotations.

Dans cette section, O désigne un point et α l'angle en degré.

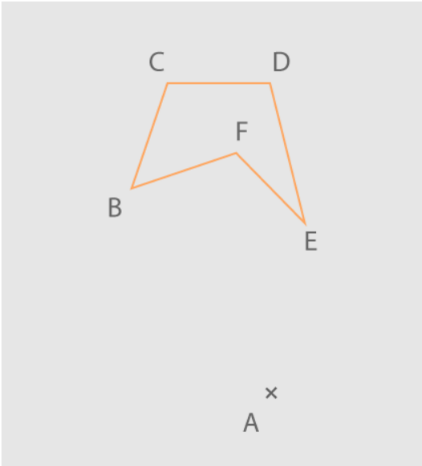
Objectif(s) d'enseignement. Définir une rotation de centre O et d'angle α d'une figure.

Pré-requis. Triangles.

Apprentissage. On fait la rotation de centre O et d'angle $\alpha = 60^o$ (dans le sens horaire) de la figure.



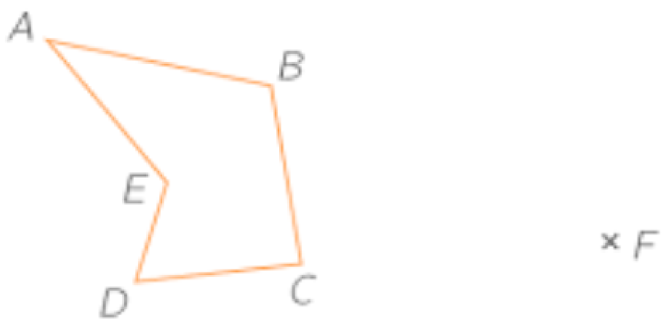
Activité de recherche 3. Dans la figure suivante.



1. Représenter la rotation de la figure de centre O et d'angle 30^o. Ensuite, faire pour 60^o.
2. **Leçon.** Formuler la définition d'une rotation de centre O et d'angle α.

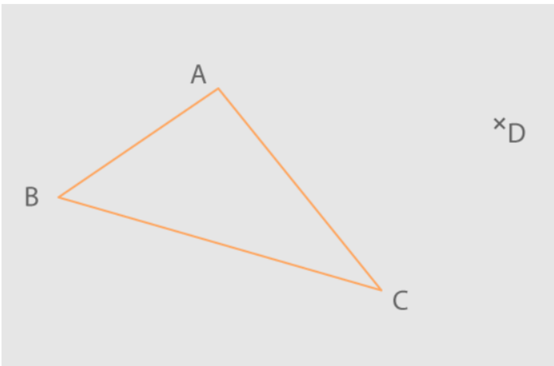
Définition. On appelle rotation de centre O et d'angle α d'une figure $\mathscr{F}$

Exercice 3. Dans la figure suivante.



1. Représenter la rotation de la figure de centre D et d'angle 182^o.

Devoir 3. Dans la figure suivante.



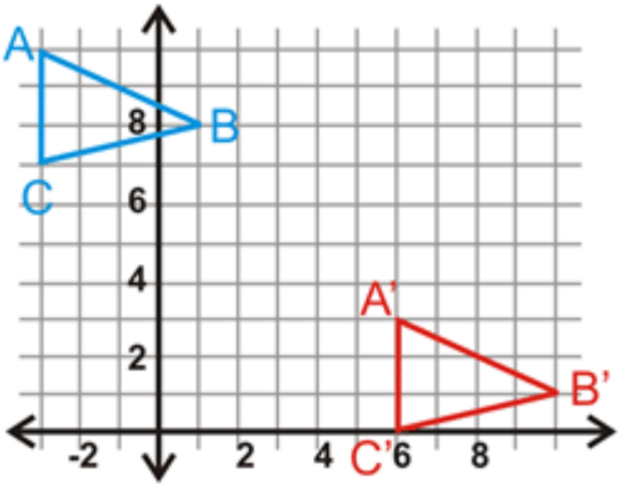
1. Représenter la rotation de la figure de centre F et d'angle 60^o.

Fin de la troisième séance.

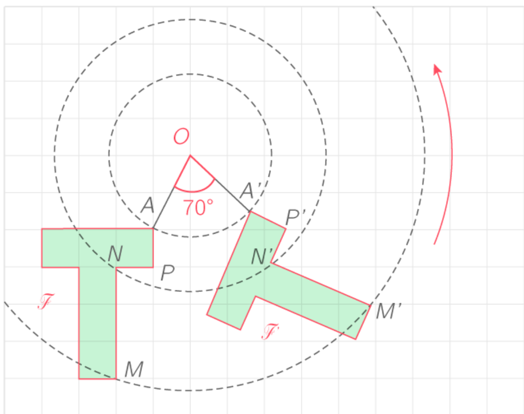
Prenez la peine de faire les exercices suivants.

3.4.4 Problèmes

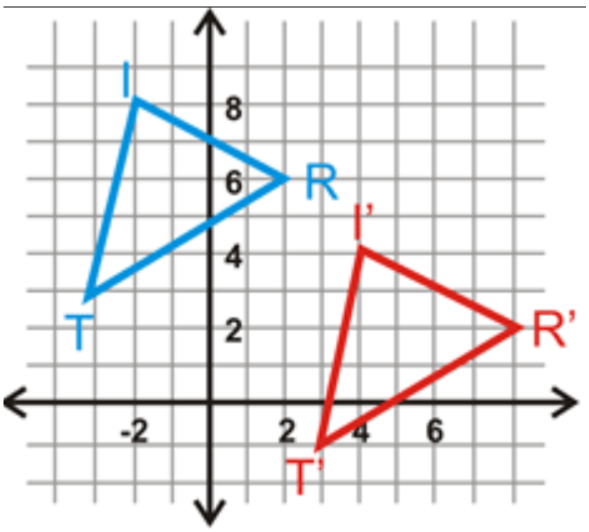
Exercice 4. Tracer la direction de la translation ci-dessous.



Exercice 5. Donner l'angle de la rotation suivante avec le sens.



Exercice 6. Tracer la direction de la translation ci-dessous.

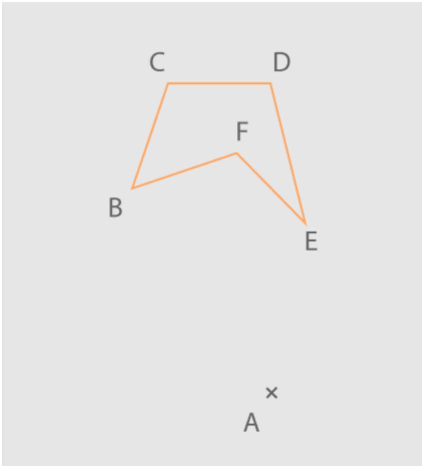


Exercice 7. Cet exercice est un exercice de construction.

1. Tracer un triangle quelconque ABC avec I le milieu de $[BC]$.
2. Construire le point D symétrique de A par rapport à B.
3. Construire le point E symétrique de A par rapport à I.

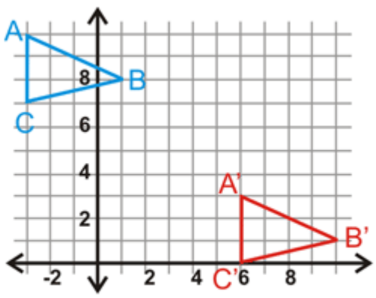
3.4.5 Examen

Exercice 1. Dans la figure ci-dessous



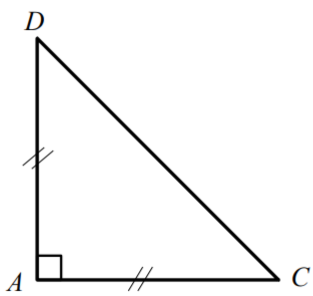
1. (/5) Représenter la rotation de la figure de centre O et d'angle 120^o.

Exercice 2. Dans la figure ci-dessous.



1. (/5) Tracer la direction de la translation de ABC vers $A'B'C'$.

Exercice 3. On considère un triangle ACD rectangle et isocèle de sommet principal A. On complétera la figure ci-contre au fur et à mesure.



1. (/1) Placer B, image de D par la rotation de centre A, de sens indirect et d'angle 60ř.
2. (/1) Démontrer que le triangle ABD est équilatéral.
3. (/1) Placer E, image du point D par la translation qui transforme A en C.
4. (/2) Démontrer que $ACED$ est un carré.

Fin de l'examen 15

3.5 Ratio

Dans la vie de tous les jours, on compare souvent des quantités entre elles, en cuisine, la répartition des élèves dans une classe ou sur une carte. Ces comparaisons peuvent se faire grâce à une notion particulière : le ratio (ou rapport).

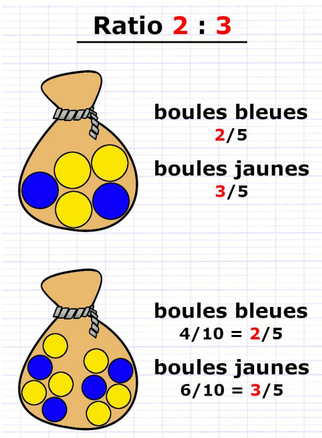
3.5.1 Ratio

Commençons par définir la notion de ratio en comparaison avec les fractions.

Objectif(s) d'enseignement. Définir le ratio.

Pré-requis. Proportionnalité. Fractions. Opérations à trous.

Apprentissage. Illustrons le ratio de 2 : 3 de couleurs bleues et de couleurs jaunes.



Activité de recherche 1. Un paquet de bonbons contient 13 bonbons à la fraise et 8 au citron.

1. Dans quel ratio sont les bonbons à la fraise et les bonbons au citron ?
2. **Leçon.** Formuler une définition d'un ratio.

Définition. Un ratio exprime une comparaison entre deux quantités, voire trois.

Le ratio permet de décrire une proportion entre deux ou plusieurs grandeurs, sans tenir compte de leur taille réelle.

Remarque. *Une fraction exprime une comparaison entre une partie et un total.*

Exercice 1. En pêchant sur le bord de la plage, Mahana a attrapé 13 animaux dont 5 crabes. Les autres sont des crevettes.

1. Dans quel ratio sont le nombre de crevettes et le nombre de crabes ?

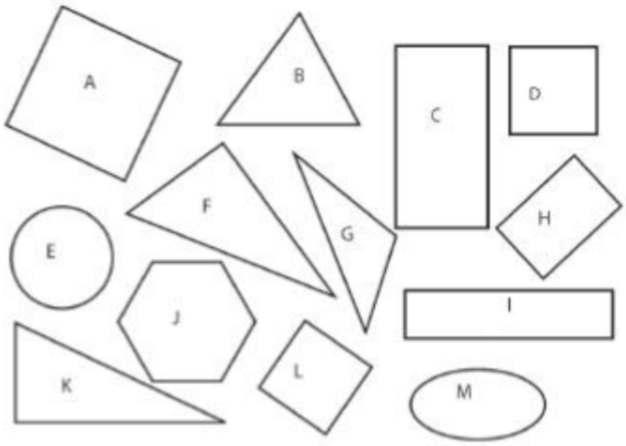
Devoir 1. Dans le mélange suivant.

1. Selon quel ratio sont les cercles et les carrés ? Quelle est la proportion de cercles ?

Fin de la première séance.
Prenez la peine de faire les exercices en problèmes.

3.5.2 Problèmes

Exercice 2. Dans les figures suivantes.



1. Donner le ratio de cercle sur les quadrilatères (figures à 4 côtés).
2. Donner le ratio de polygone de plus de 5 côtés sur les quadrilatères (figures à 4 côtés).

Exercice 3 ([4])**.** Trois amis mettent en commun leur argent de poche. Herevai a trois fois plus d'argent que Uratini. Oriau a le double de Herevai.

1. Écrire le ratio des sommes apportées par Herevai, Uratini et Oriau.
2. Ils ont en tout 140 €. Quelle somme avait Eva au départ ?

Exercice 4 ([4])**.** Un célèbre jeu en réseau indique pour le joueur le triple ratio du nombre des parties où il s'est retrouvé à égalité avec l'adversaire, pour le nombre de parties gagnées et pour le nombre de parties perdues.

- Le joueur Aitoarii a actuellement le ratio 12 :101 :126.
- Le joueur Oriau a le ratio 17 :35 :68.
- Le joueur Paranapa a le ratio 8 :63 :69.

1. Quel est le joueur le mieux classé ? Expliquer votre démarche.

3.5.3 Examen

Exercice 1. Dans la collection de carreaux colorés ci-dessous.

1. (/2.5) Donner le ratio de couleurs bleues sur les couleurs jaunes.
2. (/2.5) Donner le ratio de couleurs primaires sur la couleur verte.

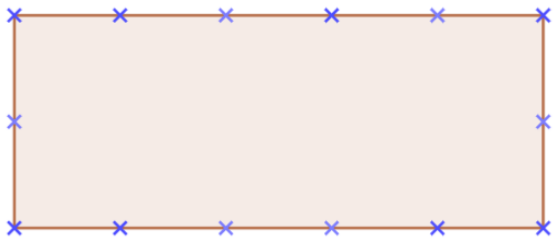
Exercice 2. Dans un cocktail sans alcool, le sirop de grenadine, le jus d'orange et l'eau gazeuse sont dans le ratio 1 :4 :2, et on ajoute une quantité négligeable de colorant bleu.

1. (/2.5) Pour une fête, on veut préparer 2,1 L de cette boisson. Quelle quantité de sirop, de jus d'orange et d'eau gazeuse faut-il prévoir ?
2. (/2.5) Avec 1 L de jus d'orange, quelle quantité de cocktail fabrique-t-on ?

Exercice 3. Pour aller en France, le partage de 207 000 EUR entre Uratini, Hereiti et Oriau se fait dans le ratio 1 :3 :5.

1. (/2.5) Montrer que Uratini recevra 23 000 EU.
2. (/2.5) Combien d'argents les autres personnes recevront-elle ?

Exercice 4. La longueur et la largeur d'un rectangle sont dans le ratio 5 :2. Son périmètre est de 84 cm.



1. (/5) Montrer que la longueur du rectangle est de 30 cm.

Fin de l'examen 16

3.6 Repérage sur une sphère

Jusqu'ici, vous avez appris à repérer un point :

— sur une droite avec une abscisse.

— dans un plan avec deux coordonnées $(x; y)$.

— dans l'espace avec trois coordonnées $(x; y; z)$.

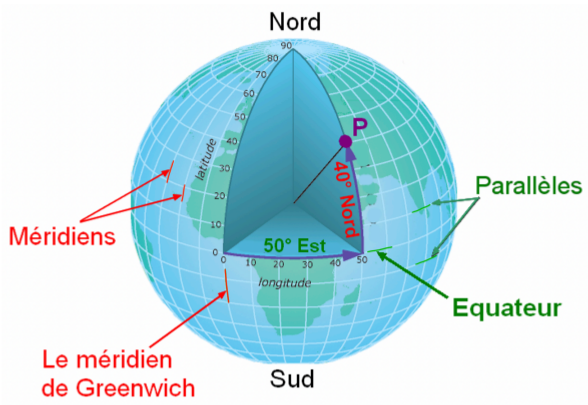
Mais dans certaines situations réelles, il est plus pratique d'utiliser un autre système de coordonnées : le repérage sphérique.

3.6.1 Définition

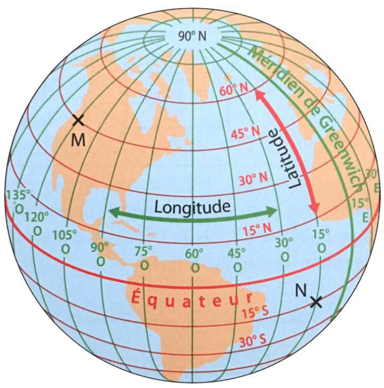
Objectif(s) d'enseignement. Comprendre les coordonnées sphériques.

Pré-requis. Repérage et notions de coordonnées.

> **Apprentissage.** Les coordonnées géographiques du point P sont (50řE; 40řN) (longitude ; latitude).



Activité de recherche 1. Sur la sphère

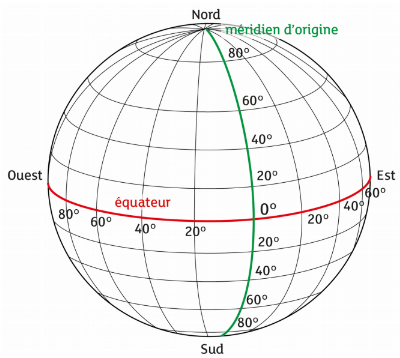


1. Donner les coordonnées de M et N.
2. **Leçon.** Formuler une définition de coordonnée sphérique.

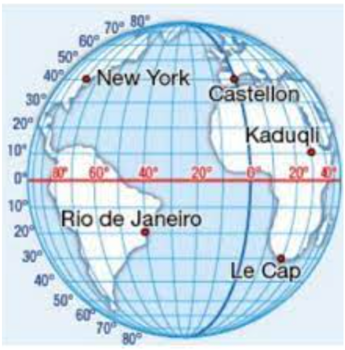
Définition. On appelle coordonnées sphériques le couple $(x; y)$ avec

— x la latitude (Nord ou Sud).

— y la longitude (Est ou Ouest).



Exercice 1. Dans la sphère représentée ci-dessous.



1. Donner les coordonnées de New York, Castellon, Kaduqli, Rio de Janeiro et Le Cap.

Devoir 1. Dans la sphère représentée ci-dessous.

1. Donner les coordonnées des points N, M, A et P.

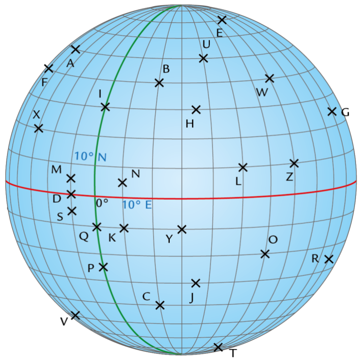
Fin de la première séance.

3.6.2 Problèmes

Exercice 2 ([3])**.** .

1. Les coordonnées de Baltimore sont (39° 17' N, 76° 36' O). Justifier cela.
2. Les coordonnées géographiques de Paris sont (2° 20' 24" E ; 48° 50' 13" N).
   - Déterminer les coordonnées de Paris dans le système décimal.
   - Donner les coordonnées géographiques du point diamétralement opposé à Paris (on dit aux antipodes de Paris).

Exercice 3. Pour découvrir le nom d'un célèbre mathématicien ayant travaillé sur les aires et les volumes du cylindre et de la sphère, compléter le tableau suivant par les noms de points qui conviennent.



Nom du point									
Coordonnées géographiques	(50°N ; 40°O)	(25°S ; 100°E)	(40°S ; 20°E)	(30°N ; 35°E)	(30°N ; 0°)	(5°N ; 10°O)	(70°N ; 70°E)	(0° ; 10°O)	(70°N ; 70°E)

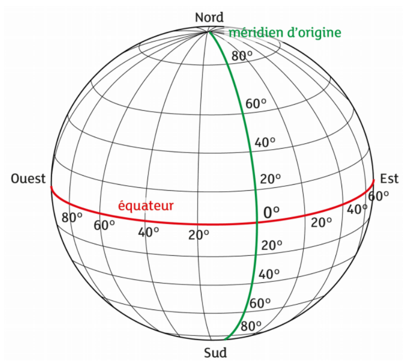
Exercice 4. Voici les coordonnées de six villes sur le globe terrestre :

.

1. Quelles sont les villes situées dans l'hémisphère Nord, c'est-à-dire au nord de l'équateur ? Justifier.
2. Quelles sont les villes situées dans l'hémisphère ouest, c'est-à-dire à l'ouest du méridien de Greenwich ?
3. Pour chacun des pays suivants, préciser le signe de sa latitude et de sa longitude : USA, Australie, Russie, Argentine.

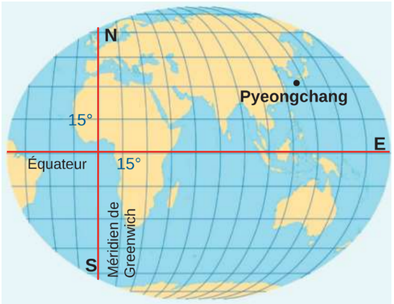
3.6.3 Examen

Exercice 1. On se place à la latitude 60ř Nord.



1. Sur cette latitude, placer les points suivants :
   — (/1) E de longitude 60° Ouest ;
   — (/1) U de longitude 40° Est ;

Exercice 2. Le biathlète Martin F. a remporté le 6ème gros globe de cristal de sa carrière en 2017 à Pyeongchang en Corée du Sud.



1. (/5) Donner approximativement la latitude et la longitude de ce lieu repéré sur la carte ci-dessus.

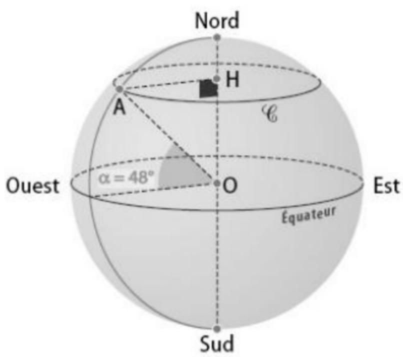
Exercice 3. Le rayon de la Terre est 6 400 km.

1. (/2.5) Un hélicoptère décolle de Sydney en Australie. Son GPS indique (33,9°S ; 151,2°E).

   Il parcourt 650 km en direction du Nord avant de se poser.

2. (/2.5) Quelles sont alors les coordonnées indiquées par son GPS ?

Exercice 4. Dans la sphère ci-dessous.



On considère un point A situé sur la parallèle de latitude 48° Nord, que l'on note C .

1. (/2.5) Donner une mesure de l'angle $\widehat{AOH}$.
2. (/2.5) En déduire le rayon du cercle C .

   Les coordonnées géographiques de Quimper (en France) sont (48° N ; 4,1° O) et celle de Donetsk (en Ukraine) sont (48° N ; 37,8°E).

3. (/3) En utilisant ce qui précède, déterminer la distance parcourue pour aller de Quimper à Donetsk en restant sur la parallèle de latitude 48° N.

Fin de l'examen 17

3.7 Représentation des solides

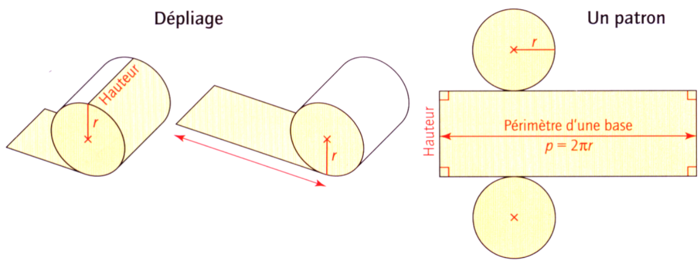
Dans la vie courante, nous rencontrons de nombreux objets en 3 dimensions comme une boîte de chaussures (parallélépipède rectangle), une canette de soda (cylindre) ou encore un ballon (sphère). Pour mieux comprendre et comparer ces objets, il faut savoir les représenter réellement et estimer leur volume.

3.7.1 Définition

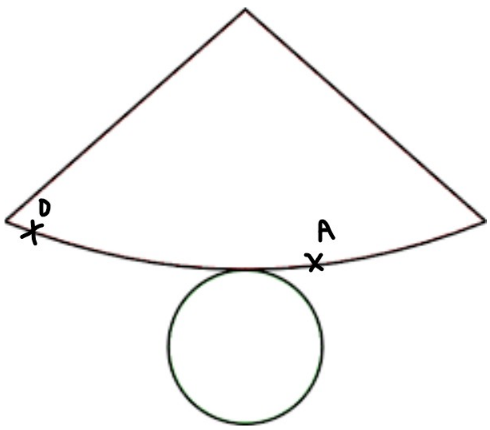
Objectif(s) d'enseignement. Définir un solide, les construire et calculer leur volume.

Pré-requis.Géométrie de l'espace.

Apprentissage. Pour représenter un cylindre, on utilise un Patron et on le découpe pour l'assembler.



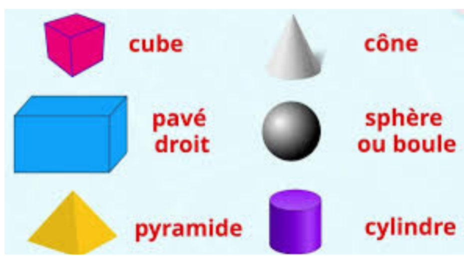
Activité de recherche 1. Un escargot glisse sur le sol d'une route et arrive devant un plot au point D. Il passera sur le plot en ligne droite pour atteindre le sol de l'autre côté du plot au point A. L'activité consiste à anticiper l'endroit où il arrivera en traversant le plot.



1. Dessiner la trajectoire de l'escargot.
2. **Leçon.** Formuler une définition d'un solide de l'espace et d'un patron.

Définition. On appelle solide toute figure géométrique en trois dimensions (3D). Il est composé de faces (plans, comme pour un cube ou un prisme), des arêtes, des sommets ou des surfaces courbes (comme la sphère ou le cylindre).

Le patron d'un solide est une figure plane obtenue lorsque l'on découpe toutes les faces du solide et qu'on les déplie à plat.



Définition. On appelle volume d'un solide est la mesure de l'espace qu'il occupe.

On l'exprime en unités cubiques : cm^3, dm^3, etc. Dans la vie courante, on utilise aussi les litres ($1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$).

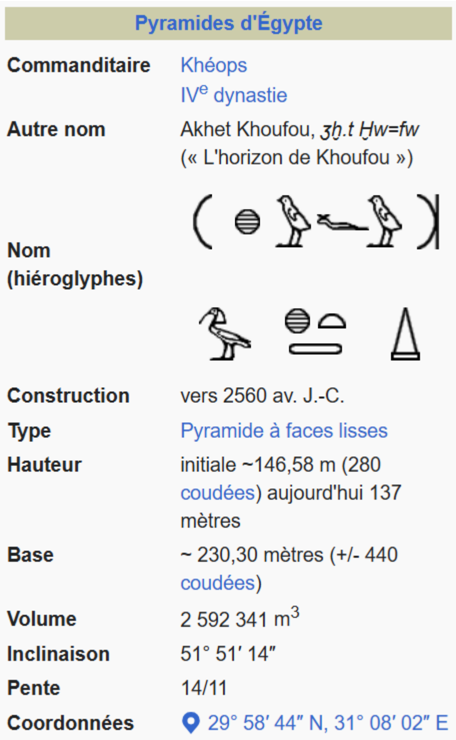
Solide	Sphère de rayon r	Pavé droit de dimension l, L et h	Cylindre de hauteur h	Pyramide ou cône de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{B}$
Formule	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$l \times L \times h$	$\pi \times r^2 \times h$	$\frac{1}{3} \times h \times \mathscr{B}$

Exercice 1. Pour chacun des solides suivants, donne le nom, puis indique faces F, arêtes A, sommets S et vérifie la relation d'Euler

$$F + S = A + 2$$

1. Cube.
2. Pavé droit.
3. Prisme droit à base triangulaire.
4. Pyramide à base carrée.

Devoir 1. La pyramide de Kheops en Égypte est un monument historique de civilisation. Plusieurs personnes dans le monde, se déplacent pour l'observer. Sur Wikipédia, on peut apercevoir ses dimensions.



Pyramides d'Égypte	
Commanditaire	Khéops IVe dynastie
Autre nom	Akhet Khoufou, *ꜣḫ.t Ḫw=fw* (« L'horizon de Khoufou »)
Nom (hiéroglyphes)	
Construction	vers 2560 av. J.-C.
Type	Pyramide à faces lisses
Hauteur	initiale ~146,58 m (280 coudées) aujourd'hui 137 mètres
Base	~ 230,30 mètres (+/- 440 coudées)
Volume	2 592 341 m^3
Inclinaison	51° 51′ 14″
Pente	14/11
Coordonnées	29° 58′ 44″ N, 31° 08′ 02″ E

1. Calculer le volume de la pyramide de Kheops.
2. Correspond-t-il au volume indiqué sur la page Wikipédia de la pyramide ? Justifier.

Fin de la première séance.

3.7.2 Problèmes

Exercice 2. Dans un cube dont la longueur de chaque arrête est égale à $4,5$ cm, calculer son volume et l'aire de chaque face.

Exercice 3. Dans un pavé droit de dimension 8 cm x 5 cm x 3 cm, calculer son volume et l'aire de chaque face.

3.7.3 Examen

Exercice 1. Un cylindre de rayon $r = 3,2$ cm et de hauteur $h = 10$ cm.

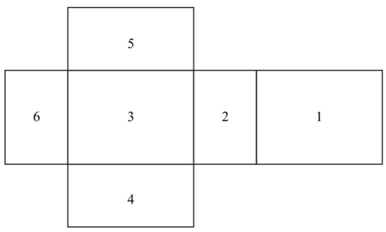
1. (/2) Calcule le volume.
2. (/2) Calcule l'aire latérale (on ne pas demander l'aire des deux bases).
3. (/1) Faire un schéma à main lever du cylindre avec les longueurs du rayon et de la hauteur.

Exercice 2. On assemble un pavé droit 10 cm x 6 cm x 4 cm et, au-dessus de la face 10 x 6, on colle un demi-cylindre de rayon 3 cm et de longueur 10 cm.

1. (/2.5) Calculer le volume total.
2. (/2.5) Donne une valeur approchée au cm^3 près (prendre $\pi \simeq 3,14$)

Exercice 3. Une araignée se promène dans une salle de classe qui a la forme d'un pavé droit. L'araignée se situe sur la face 6 puis la face 3 pour aller vers la face 4.

1. (/2.5) Représenter la situation sur le patron en traçant le chemin que parcourt l'araignée.
2. (/2.5) Par combien de face est-elle passée ? Justifier.



Exercice 4. Une glacière a la forme d'un pavé droit de dimensions 40 cm $\times$ 25 cm $\times$ 30 cm. À l'intérieur, on place des gobelets cylindriques de rayon 3,5 cm et de hauteur 10 cm.

1. (/5) Combien de gobelets peuvent tenir dans la glacière et quelle quantité totale de boisson on pourra transporter ?

Indication. On demande aussi de représenter un patron possible de la glacière (sans le couvercle) et de calculer la quantité de tissu nécessaire pour la recouvrir.

Fin de l'examen 18

Bibliographie

[1] Euclide. *Les Elements.* 300 av. J-C.

[2] Kho Tek Hong. *Je m'entraîne en maths avec la méthode de Singapour.* La librarie des écoles, 2023.

[3] Mathemathieu. *GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE : REPÉRAGE SUR LA SPHÈRE TERRESTRE.* Montpellier, 2023.

[4] GRACOM Montpellier. *Les ratios au cycle 4.* Montpellier, 2023.

[5] Ronny Teriipaia. Lettre de rentrée. *Ministère de l'éducation.*, 2024.