FACULTE DES SCIENCES D'ANGERS

UNIVERSITE D'ANGERS

DECOMPOSITION D'IWASAWA ET APPLICATION

un projet de mémoire préparé par

Haerearii Metuarea

sous la direction de

M. Piotr Graczyk

Licence 3 de Mathématiques appliquées
Mai 2020

Remerciement

Je tiens à remercier chaleureusement mon professeur M. Piotr Graczyk dont la gentillesse, les connaissances et la patience m'ont été d'une valeur inestimable. Suivre ses cours et être soutenu par ses commentaires m'ont fait retenir une expérience exceptionnelle que je veux témoigner dans ce travail. Ce projet donne une occasion pour moi d'exercer la recherche sur un sujet dont j'ai le plaisir d'en apporter les réponses. Par ailleurs, je remercie aussi M. François Ducrot puisque c'est grâce à son accord que j'ai pu préparer individuellement ce travail de recherche sous les consignes de M. Graczyk.

Finalement, je profite de ces lignes pour remercier mes enseignants sur le sol polynésien, en commençant par M. Martin Weimann pour son temps, son expérience et sa profonde générosité. C'est lui qui m'a permis de venir jusqu'en métropole pour continuer mes études à l'université d'Angers. Enfin, ma reconnaissance va jusqu'à M. Alexey Zykin puisque c'est grâce à lui, à ses compétences et à sa patience que j'ai pu continuer dans mes études et apprendre, et surtout aimer, les mathématiques.

Table des matières

Introduction

Les groupes de Lie comprennent des propriétés intéressantes qui sont très utilisées en mathématiques et en physique. Parmi ses propriétés, celle qui suit, plus connue sous le nom de *5ème problème de Hilbert*, joua un rôle important en mathématiques en raison de sa simplicité et de ses conséquences : « tout groupe de Lie est nécessairement différentiable ». Concernant l'état de l'art, elle fut vérifiée de manière rigoureuse et exhaustive au milieu du 20ème siècle par Yamabe. Après sa preuve, nous pouvons encore trouver des preuves qui subsistent et, parmi elles, nous nous intéresserons à celle de Iwasawa, dans [2], puisque sa démonstration utilise une méthode originale d'approximation d'un groupe de Lie. De cette démarche naquit un résultat remarquable appelé *décomposition d'Iwasawa* qui donne l'écriture unique d'un certain groupe de Lie en forme de produit de sous-groupe de Lie. La théorie des groupes de Lie étant très vaste, nous allons nous restreindre essentiellement sur un groupe de Lie particulier pour en comprendre et en cerner les aspects : celui du groupe des matrices inversibles. Pour un public étranger à la théorie des groupes de Lie, la difficulté et les obstacles sont naturellement l'ignorance de ces concepts. Sa compréhension pour un tel public nécessite donc une approche totalement nouvelle.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Le premier chapitre énonce la décomposition d'Iwasawa dans le cas du groupe des matrices inversibles. Ce chapitre traitera aussi de sa preuve inspirée de celle de Lang dans [3]. Ensuite, le second chapitre fournit quelque application de cette décomposition et donne une méthode pratique pour décomposer une matrice inversible de taille quelconque au sens d'Iwasawa. Enfin, nous donnerons, dans le dernier chapitre, la généralisation de cette décomposition. Ce chapitre n'ayant pour but que d'exposer les richesses et les motivations de ce résultat, il s'agit ici d'un survol des concepts de cette décomposition appuyés par les livres de Warner [6], de Faraut [1] et de Terras [5] et [4]. Ainsi, la preuve et les termes très techniques de cette décomposition ne seront pas donnés. Nous tâcherons de mettre l'accent sur l'importance de ce résultat.

Chapitre 1

Décomposition d'Iwasawa

1.1 Énoncé de la décomposition

Notons $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficient dans $\mathbb{R}$. Les matrices de cet ensemble comprennent des propriétés intéressantes et se distinguent des unes des autres dans leur forme. Les matrices qui suivent en sont étroitement liées à la décomposition d'Iwasawa et ce sont elles qui mériteront notre attention.

Définition 1. *On dit qu'une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est*
— *orthogonale à coefficient dans $\mathbb{R}$ si $M^T = M^{-1}$.*
— *diagonale à coefficient dans $\mathbb{R}^{+*}$ si les coefficients en dehors de la diagonale sont 0.*
— *unipotente triangulaire supérieure à coefficient dans $\mathbb{R}$ si elle est triangulaire supérieure admettant comme unique valeur propre 1 (i.e. des coefficients diagonaux comportant uniquement des 1).*

Respectivement, l'ensemble de telles matrices se notera :
— $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des matrices orthogonales à coefficient dans $\mathbb{R}$ de taille n.
— $\mathscr{D}_n(\mathbb{R}^{+*})$ comme l'ensemble des matrices diagonales à coefficient dans $\mathbb{R}^{+*}$ de taille n.
— $\mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des matrices unipotentes à coefficient dans $\mathbb{R}$ de taille n.

Notons que Lang, dans [3], définit une « matrice unipotente » comme une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur sa diagonale.

La décomposition d'Iwasawa dans le cas des matrices inversibles s'énonce comme suit.

Théorème 1 (Iwasawa). $\forall G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \exists!(O, D, K) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^{+*}) \times \mathscr{U}_n(\mathbb{R}),\ G = ODK.$

Pour une telle décomposition, nous pouvons la voir sous la forme du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "G"] \arrow[d, "K"'] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "D"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "O"']
\end{tikzcd}$$

Diagramme commutatif de la décomposition d'Iwasawa.

Pour démontrer un tel résultat, nous nous inspirerons de la preuve de Lang ; dans [3]. Lang a prouvé cette décomposition dans le cas de l'ensemble des matrices réelles de déterminant unitaire, i.e. le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. À travers son raisonnement, nous pouvons voir une

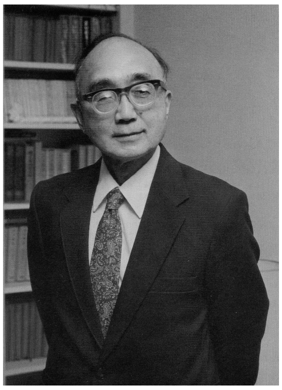

FIGURE 1.1 – Kenkichi Iwasawa (1917-1998)

possibilité de le généraliser dans le cas de l'ensemble des matrices de déterminant non nul. Pour ce faire, nous raisonnerons comme tel. Étant donné qu'il s'agit ici d'un résultat portant sur une existence et une unicité, notre raisonnement consistera naturellement à prouver d'abord l'existence et puis son unicité. La preuve de l'existence d'une telle écriture reposera en grande partie sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Celle de l'unicité se fera par un raisonnement direct ; nous considérerons deux écritures distinctes puis nous verrons que ces deux écritures ne peuvent qu'être identiques.

Avant de commencer cette preuve, dressons les résultats intermédiaires nécessaires pour notre preuve.

Lemme 1 (Décomposition DK). *Soit $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Alors il existe deux matrices*
— $D = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice diagonale telle que* $\forall i \in [1,n] \subset \mathbb{N}^*$, $d_{ii} = t_{ii}$.
— $K = (k_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice unipotente telle que* $\forall i < j$, $k_{ij} = t_{ij}/t_{ii}$.
qui vérifient $T = DK$.

Démonstration. Il est clair que DK est triangulaire supérieure. En désignant par $(DK)_{ij}$ les coefficients de coordonnée (i,j) de la matrice DK alors

$$\forall i \neq j, (DK)_{ij} = d_{ii}k_{ij} = t_{ij}$$

Le cas $i = j$ est trivial puisque, par un calcul direct, $(DK)_{ii} = t_{ii}$. Ce qui correspond aux coefficients d'une matrice triangulaire supérieure et cela termine donc la preuve. □

Lemme 2. *Soient T_S une matrice triangulaire supérieure et T_I une matrice triangulaire inférieure. Si $T_S = T_I$ alors*
— *les coefficients diagonaux de T_S sont égales à ceux de T_I.*
— *les coefficients non-diagonaux de T_S et de T_I sont nulles.*

Démonstration. La preuve est triviale. Posons

$$T_S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ & s_{22} & & s_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & s_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } T_I = \begin{pmatrix} i_{11} & & & (0) \\ i_{21} & i_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

Si $T_S = T_I$ alors, par égalité matricielle, les coefficients de la matrice de gauche sont égaux à ceux de la matrice de droite. En particulier, nous obtenons d'une part

$$\forall j \in [1, n] \subset \mathbb{N}^*, \, s_{jj} = i_{jj}$$

Ce qui signifie que les coefficients diagonaux de T_S sont égales à ceux de T_I. D'autre part

$$\forall j < k \in [1, n] \subset \mathbb{N}^*, \, s_{jk} = i_{kj} = 0$$

Ce qui signifie que les coefficients non-diagonaux de T_S et de T_I sont nulles. □

1.2 Preuve de l'existence de la décomposition

Soit $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Notons $\mathscr{G}$ l'ensemble des vecteurs colonnes de G. Comme G est inversible alors son déterminant est non nul ; cela signifie que $\mathscr{G}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire classique $\langle .,. \rangle$ et appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur $\mathscr{G}$. Nous obtenons alors une base orthogonale $\mathscr{U} = \{u_1, ..., u_n\}$ et une base orthonormée $\mathscr{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ où les vecteurs de chaque base respective vérifient

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \, u_j = g_j - \sum_{p=1}^{j-1} \frac{\langle u_p, g_j \rangle}{\|u_p\|^2} u_p \text{ et } v_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$$

avec $\|.\| := \sqrt{\langle .,. \rangle}$ désignant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

L'idée est de trouver une matrice triangulaire de sorte que les vecteurs de $\mathscr{V}$ s'écrivent comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{G}$ (i.e. avec les vecteurs colonnes de la matrice G). Pour ce faire, procèdons comme suit. Prenons le vecteur v_1 puis réecrivons-le selon des vecteurs de $\mathscr{G}$, cela donne :

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} g_1$$

Ensuite, pour v_2, utilisons l'expression de u_1 puis isolons g_1, ce qui donne

$$v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} g_2 + b_{12} g_1$$

pour un certain scalaire réel b_{12}. En procédant de la même manière, cela revient à réecrire le j-ème vecteur de $\mathscr{V}$ comme suit.

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \, v_j = b_{jj} g_j + b_{(j-1)j} g_{j-1} + \cdots + b_{1j} g_1$$

avec $b_{jj} = \frac{1}{\|u_j\|} > 0$ et certains scalaires réels $b_{(j-1)j}, ..., b_{1j}$. En écrivant tous ces vecteurs « en cascade », nous obtenons un système qui vérifie l'équation matricielle suivante.

$$(v_1, ..., v_n) = GB$$

avec $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ce qui montre l'existence d'une matrice triangulaire telle que les vecteurs de $\mathscr{V}$ s'expriment comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{G}$ (i.e. avec les coefficients provenant de G). La diagonale de B est, par construction, strictement positive. Il s'ensuit que B est inversible. En posant $O = GB$ alors $O \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Ce qui signifie que O est une matrice orthogonale car ses vecteurs colonnes sont exactement les vecteurs de $\mathscr{V}$; i.e. des vecteurs deux à deux orthogonaux et de norme 1. De plus

$$G = OB^{-1} \tag{1.1}$$

La matrice B étant triangulaire supérieure alors son inverse l'est aussi. Puis, en posant $R = B^{-1}$ alors, par le lemme 1, il existe une matrice $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^{+*})$ et une matrice $K \in \mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$R = DK \tag{1.2}$$

En remplaçant dans l'équation (1.1) ce que nous avons dans celle de (1.2) nous obtenons

$$G = OB^{-1} = OR = ODK$$

Ce qui prouve l'existence de la décomposition.

1.3 Preuve de l'unicité de la décomposition

Soient $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $(O_1, O_2) \in (\mathscr{O}_n(\mathbb{R}))^2$, $(D_1, D_2) \in (\mathscr{D}_n(\mathbb{R}^{+*}))^2$, $(K_1, K_2) \in (\mathscr{U}_n(\mathbb{R}))^2$. Supposons que $G = O_1 D_1 K_1 = O_2 D_2 K_2$. Calculons $G^T G$ où G^T désigne la transposée de G.

$$G^T G = K_1^T D_1^T O_1^T O_1 D_1 K_1 = K_1^T D_1^T D_1 K_1$$

Comme D_1 est diagonale alors $D_1^T = D_1$ et ainsi $D_1^T D_1 = D_1^2$. Puis nous obtenons $G^T G = K_1^T D_1^2 K_1$. En effectuant la même chose avec $G = O_2 D_2 K_2$, nous obtenons $G^T G = K_2^T D_2^2 K_2$. Par égalité, nous pouvons écrire

$$K_1^T D_1^2 K_1 = K_2^T D_2^2 K_2 \Leftrightarrow \left(K_2^T\right)^{-1} K_1^T D_1^2 = D_2^2 K_2 (K_1)^{-1} \Leftrightarrow \left(K_1 K_2^{-1}\right)^T D_1^2 = D_2^2 K_2 (K_1)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(K_1 K_2^{-1}\right)^T D_1^2 = D_2^2 \left((K_2)^{-1}\right)^{-1} (K_1)^{-1} \Leftrightarrow \left(K_1 K_2^{-1}\right)^T D_1^2 = D_2^2 \left(K_1 K_2^{-1}\right)^{-1}$$

En posant $U = K_1 K_2^{-1}$ alors cela revient à écrire

$$U^T D_1^2 = D_2^2 U^{-1} \tag{1.3}$$

Maintenant analysons cette équation. Tout d'abord, puisque la matrice K_2 est triangulaire supérieure alors son inverse l'est aussi. Par produit de matrices triangulaires supérieures, la matrice $U = K_1 K_2^{-1}$ l'est aussi. Ce qui signifie que U^{-1} est triangulaire supérieure et U^T est triangulaire inférieure. Comme D_1^2 est diagonale et U^T est triangulaire inférieure alors $U^T D_1^2$ est triangulaire inférieure dont la diagonale est celle de D_1^2.

Par ailleurs, comme U^{-1} est triangulaire supérieure et D_2^2 est diagonale alors $D_2^2 U^{-1}$ est triangulaire supérieure dont la diagonale est celle de D_2^2.

L'équation (1.3) est alors une égalité entre une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure. Par le lemme 2, la diagonale de $U^T D_1^2$ est égale à la diagonale de $D_2^2 U^{-1}$ et les coefficients, sur les parties non-diagonales de ces matrices, sont nuls. D'une part, l'égalité $D_1^2 = D_2^2$ équivaut à écrire $D_1 = D_2$ par positivité des coefficients. D'autre part,

$$U^T D_1^2 = D_1^2 U^{-1} = D_1^2 \Longrightarrow U^T = I_n$$

Cette dernière égalité équivaut à celle-ci $U = I_n$. Comme $U = I_n$ alors $K_1 = K_2$. Par conséquent, en revenant à l'équation initiale $O_1 D_1 K_1 = O_2 D_2 K_2$, il vient l'égalité suivante $O_1 = O_2$. Nous venons donc de montrer l'implication suivante.

$$O_1 D_1 K_1 = O_2 D_2 K_2 \Longrightarrow O_1 = O_2,\ D_1 = D_2 \text{ et } K_1 = K_2$$

Ce qui prouve l'unicité et cela termine la preuve de la décomposition.

$\square$

Chapitre 2

Applications et algorithme numérique

Ce deuxième chapitre fait l'objet d'une réflexion personnelle concernant la décomposition d'Iwasawa.

2.1 Application dans l'inégalité de Hadamard

L'analyse de la preuve, au chapitre précédent, donne un lien très étroit entre la décomposition d'Iwasawa et la décomposition QR. Cette dernière, donnant la décomposition d'une matrice carrée sous la forme du produit matriciel QR avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure, porte une application sur l'inégalité d'Hadamard.

Ce qui nous laisse naturellement la liberté de vérifier si la décomposition d'Iwasawa ne porterait bien sûr pas la même application. La présence de cette section au sein de ce travail assure qu'une telle application est vraie. Rappelons cette inégalité.

Théorème 2 (Hadamard). *Soit $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors la valeur absolue de son déterminant vérifie la majoration suivante*

$$|\det G| \leq \prod_{j=1}^{n} \|g_j\|$$

où g_j désigne la j-ème colonne de G.

Démonstration. Soit $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par la décomposition d'Iwasawa, il existe un unique triplet $(O, D, K) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^{+*}) \times \mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $G = ODK$. En calculant son déterminant nous obtenons

$$|\det G| = |\det(ODK)| = |\det O \cdot \det D \cdot \det K|$$

Étant donné que O est orthogonale alors $|\det O| = |\pm 1| = 1$. Par ailleurs, K est unipotente alors $|\det K| = 1$. Par conséquent, le déterminant de G vaut le déterminant de D en valeur absolue. Rappelons qu'à partir de la décomposition d'Iwasawa, la matrice diagonale D a des coefficients diagonaux de signe strictement positif. Munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire $\langle .,. \rangle$. De telles coefficients valent $\|u_j\|$ où $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$ et $\{u_j\}_{1 \leq j \leq n}$ la famille orthogonale de vecteurs déduite de la famille $\{g_1, ..., g_n\}$ par le procédé de Gram-Schmidt. Nous pouvons alors écrire

$$|\det G| = |\det D| = \prod_{j=1}^{n} \|u_j\|$$

Pour obtenir la majoration attendue de l'inégalité d'Hadamard, nous allons réecrire $\|u_j\|$ sous la forme d'un produit scalaire de deux vecteurs bien choisis ; à savoir ceux de la base orthonormée $\{v_1, ..., v_n\}$ et des vecteurs colonnes de G $\{g_1, ..., g_n\}$. Nous avons

$$\|u_j\| = \frac{\|u_j\|^2}{\|u_j\|} = \frac{\|u_j\|^2}{\|u_j\|} + \sum_{i \neq j} \frac{k_{ij}}{\|u_j\|} \langle u_i, u_j \rangle = 1 \cdot \frac{\langle u_j, u_j \rangle}{\|u_j\|} + \sum_{i \neq j} \frac{k_{ij}}{\|u_j\|} \langle u_i, u_j \rangle$$

où les k_{ij} désignent les coefficients de la matrice K. En unissant les termes dans une et même somme, nous obtenons

$$\|u_j\| = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{ij}}{\|u_j\|} \langle u_i, u_j \rangle$$

En vertu de la propriété de la bilinéarité du produit scalaire, nous pouvons écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_{ij}}{\|u_j\|} \langle u_i, u_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} k_{ij} u_i, \frac{u_j}{\|u_j\|} \rangle$$

En notant $v_1, ..., v_n$ les vecteurs orthonormés construits à partir de la famille $\{g_1, ..., g_n\}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, ils valent respectivement $\frac{u_1}{\|u_1\|}, ..., \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Il vient alors, tout d'abord pour le terme de droite du produit scalaire, l'égalité suivante

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \ \frac{u_j}{\|u_j\|} = v_j$$

Ensuite, pour le terme de gauche du produit scalaire, nous pouvons réecrire cette quantité en fonction de la base orthonormée

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \ \sum_{i=1}^{n} k_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \|u_i\| k_{ij}$$

Or, rappelons que la décomposition d'Iwasawa de G s'écrit

$$\begin{aligned}(g_1, ..., g_n) &= (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} \|u_1\| & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \|u_n\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & & k_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & & k_{nn} \end{pmatrix} \\ &= (\|u_1\| v_1, ..., \|u_n\| v_n) \begin{pmatrix} k_{11} & & k_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & & k_{nn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En utilisant la formule du produit matriciel vecteur colonne par vecteur colonne de G, nous obtenons

$$g_1 = \sum_{i=1}^{n} k_{i1} \|u_i\| v_i, ..., \ g_n = \sum_{i=1}^{n} k_{in} \|u_i\| v_i$$

Par récurrence, nous déduisons que

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \ \sum_{i=1}^{n} k_{ij} u_i = g_j$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \|u_j\| = \langle g_j, v_j \rangle \Longrightarrow |\|u_j\|| = \|u_j\| = |\langle g_j, v_j \rangle|$$

Puis, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous pouvons majorer par le produit de la norme euclidienne des vecteurs g_j et v_j.

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ |\langle g_j, v_j \rangle| \leq \|g_j\| \|v_j\| = \|g_j\|$$

puisque les vecteurs v_j sont orthonormés alors $\|v_j\| = 1$. En faisant le produit indexés sur l'indice j dans $[1, n] \subset \mathbb{N}$ nous obtenons

$$\prod_{j=1}^{n} |\langle g_j, v_j \rangle| \leq \prod_{j=1}^{n} \|g_j\|$$

Finalement

$$|\det G| = |\det D| = \prod_{j=1}^{n} \|u_j\| = \prod_{j=1}^{n} |\langle g_j, v_j \rangle| \leq \prod_{j=1}^{n} \|g_j\|$$

Ce qui clôt la preuve. □

2.2 Algorithme numérique

En s'inspirant de la preuve méthodique de Lang dans [3] et de celle que nous avons proposée au chapitre 1, nous pouvons exhiber une méthode pour déterminer la décomposition d'Iwasawa d'une matrice inversible. C'est une méthode très calculatoire. Elle demande d'abord de calculer les vecteurs orthonormés et orthogonaux des vecteurs colonnes de la matrice inversible en question. Ensuite, elle demande de construire la matrice O. Cette construction est simple puisque les vecteurs colonnes de O sont les vecteurs orthonormés calculés précédemment. Enfin, il s'agit de calculer les matrices D et K avec « la décomposition DK » au chapitre 1.

Algorithme 1. .

ENTREE *les matrices* $G = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $U = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $V = (v_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

SORTIE *les matrices* O, D, K.

1. Calculer $R = V^{-1} \cdot G$.
2. Pour j *allant de* 0 *à* n *:*
3. Pour i *allant de* 0 *à* n *:*
4. Si $i = j$ *alors :*
5. Calculer $d_{ij} = \|u_j\|$ *et* $k_{ij} = 1$.
6. Si $i < j$ *alors :*
7. Calculer $k_{ij} = r_{ij} / r_{ii}$ *et* $d_{ij} = 0$.
8. Si $i \geq j$ *alors :*
9. Calculer $k_{ij} = 0$ *et* $d_{ij} = 0$.
10. Retourner $O = V$, $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *et* $K = (k_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Nous pouvons étendre cette méthode vers un algorithme numérique capable de calculer n'importe quelle matrice inversible de taille arbitraire. Cet algorithme prend en compte la partie du procédé de Gram-Schmidt afin de faciliter l'utilisation de l'algorithme par l'utilisateur. Cet algorithme est le suivant et est écrit sous le langage Python.

```
from math import *
import numpy as np
def iwasawa(g):
  U,V,D,K = np.zeros((len(g),len(g))),
np.zeros((len(g),len(g))), np.zeros((len(g),len(g))),
np.zeros((len(g),len(g)))
  for j in range(len(g)):
   if j == 0:
    U[:,j] = g[:,j]
    V[:,j] = U[:,j]/(np.linalg.norm(U[:,j]))
   else:
    som = 0
    for p in range(j):
     som = som + U[:,p]*(np.vdot(U[:,p],g[:,j]))/(np.vdot(U[:,p],U[:,p]))
    U[:,j] = g[:,j] - som
    V[:,j] = U[:,j]/(np.linalg.norm(U[:,j]))
  O = V
  R = np.dot(np.linalg.inv(O),g)
  for j in range(len(g)):
   for i in range(len(g)):
    if i == j:
     D[i,j] = np.linalg.norm(U[:,j])
     K[i,j] = 1
    if i < j:
     K[i,j] = R[i,j]/R[i,i]
  return O,D,K
```

FIGURE 2.1 – Algorithme numérique de la décomposition d'Iwasawa sous le langage Python.

Naturellement, les défauts d'un tel algorithme résident dans l'approximation des coefficients.

Un exemple d'application de ces méthodes pourrait être le suivant. Nous nous proposons de calculer la décomposition d'Iwasawa d'une matrice de taille 10.

Exemple 1. *Considérons la matrice*

$$\begin{pmatrix}
1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 & 262144 \\
1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 & 19683 \\
1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 \\
1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 & 117649 & 823543 & 5764801 & 40353607 \\
1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 & 531441 & 4782969 & 43046721 & 387420489 \\
1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 & 10000000 & 100000000 & 1000000000 \\
1 & 30 & 900 & 27000 & 810000 & 24300000 & 729000000 & 21870000000 & 656100000000 & 19683000000000 \\
1 & 12 & 144 & 1728 & 20736 & 248832 & 2985984 & 35831808 & 429981696 & 5159780352 \\
1 & 22 & 484 & 10648 & 234256 & 5153632 & 113379904 & 2494357888 & 54875873536 & 1207269217792 \\
1 & 8 & 64 & 512 & 4096 & 32768 & 262144 & 2097152 & 16777216 & 134217728
\end{pmatrix}$$

Remarquons que cette matrice est une matrice de Vandermonde, donc elle est inversible. La décomposition d'Iwasawa de cette matrice avec l'algorithme donne, respectivement une matrice orthogonale, une matrice diagonale et une matrice unipotente.

$$\begin{pmatrix}
3.16227766e-01 & -2.52139970e-01 & 1.99469987e-01 & 9.65326677e-03 & -3.57097421e-01 & 5.03410184e-01 & -5.21270158e-02 & -5.09297851e-01 & 4.19639112e-01 & 4.10063323e-01 \\
3.16227766e-01 & -2.89772801e-01 & 3.15747993e-01 & -1.42571323e-01 & -6.20767431e-02 & 3.01840670e-01 & -3.83418646e-01 & 5.85486726e-01 & -3.69649539e-01 & -3.58712416e-01 \\
3.16227766e-01 & -3.27405633e-01 & 4.41511967e-01 & -3.40579675e-01 & 4.41130157e-01 & -4.38607542e-01 & 2.36655031e-01 & -1.79634704e-01 & 9.29826312e-02 & 8.96419300e-02 \\
3.16227766e-01 & -1.39241476e-01 & -9.24482222e-02 & 2.29585162e-01 & -3.83019074e-01 & -1.00087166e-01 & 5.40886211e-01 & -8.21164286e-02 & -4.97683341e-01 & -4.98456703e-01 \\
3.16227766e-01 & -6.39758133e-02 & -2.39630521e-01 & 2.16882232e-01 & -1.59988439e-02 & -2.95132690e-01 & -2.81445177e-01 & 1.67916220e-01 & 4.78054113e-01 & 4.84138504e-01 \\
3.16227766e-01 & -2.63429819e-02 & -2.98992718e-01 & 1.74121719e-01 & 2.00805364e-01 & -1.67799279e-01 & -5.38262769e-01 & -4.43941570e-01 & -3.90267963e-01 & -4.00151586e-01 \\
3.16227766e-01 & 7.26313645e-01 & 5.05816647e-01 & 3.33317797e-01 & 7.35010497e-02 & 1.06587726e-02 & 1.11028241e-03 & 8.70188666e-05 & 1.08128126e-06 & 2.93316038e-06 \\
3.16227766e-01 & 4.89226808e-02 & -3.89259208e-01 & 3.47629504e-02 & 5.97671721e-01 & 5.13150901e-01 & 3.27662097e-01 & 1.16272126e-01 & 4.85473358e-02 & 5.09353648e-02 \\
3.16227766e-01 & 4.25250994e-01 & -2.71433569e-01 & -7.51807532e-01 & -2.76309528e-01 & -6.18038346e-02 & -1.01349128e-02 & -1.19417281e-03 & -8.64392153e-05 & -1.11089263e-04 \\
3.16227766e-01 & -1.01608645e-01 & -1.70782356e-01 & 2.36635403e-01 & -2.18606682e-01 & -2.65630017e-01 & 1.59074899e-01 & 3.46422635e-01 & 2.18463011e-01 & 2.22649740e-01
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3.16227766e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 \\
0.00000000e+00 & 2.65725422e+01 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 2.10837731e+02 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.58058195e+03 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 7.20066269e+03 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 2.41635761e+04 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 5.57174248e+04 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.05804869e+05 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 2.41593449e+05 & 0.00000000e+00 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 5.20822612e+07
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
1.00000000e+00 & 1.07000000e+01 & 1.85100000e+02 & 4.20590000e+03 & 1.08840300e+05 & 2.99123870e+06 & 8.47282011e+07 & 2.44179121e+09 & 7.11571516e+10 & 2.08969913e+12 \\
0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & 3.15157910e+01 & 9.04081150e+02 & 2.58695297e+04 & 7.46664028e+05 & 2.17419552e+07 & 6.37728165e+08 & 1.88120324e+10 & 5.57327401e+11 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & 4.51824944e+01 & 1.57777704e+03 & 5.09619958e+04 & 1.59516984e+06 & 4.91688245e+07 & 1.50238847e+09 & 4.56553422e+10 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & 6.28015414e+01 & 2.70503478e+03 & 1.00109297e+05 & 3.42854256e+06 & 1.12288199e+08 & 3.57687157e+09 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & 7.16553787e+01 & 3.35072086e+03 & 1.30657486e+05 & 4.62898956e+06 & 1.55037778e+08 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & 7.82745630e+01 & 3.87415153e+03 & 1.56758408e+05 & 5.69074737e+06 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & 8.59895387e+01 & 4.54116993e+03 & 1.92123753e+05 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & 9.16764488e+01 & 5.05851781e+03 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00 & -1.17130215e+02 \\
0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 0.00000000e+00 & 1.00000000e+00
\end{pmatrix}$$

2.3 Autres applications

Au delà, il existe encore énormément d'applications, notamment dans
— la résolution des systèmes linéaires.
— le calcul des déterminants.
— la résolution des systèmes de congruence.
Respectivement, les résultats qui suivent traitent de ces applications.

Corollaire 1. *Soit $AX = Y$ un système linéaire avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, X un vecteur colonne de n indetérminées réelles et Y un vecteur colonne de n nombres réels. Alors, ce système équivaut au système échelonné suivant.*

$$KX = D^{-1}O^{T}Y$$

avec $(O, D, K) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{D}_n(\mathbb{R})^{+*} \times \mathscr{U}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Par la décomposition d'Iwasawa, il existe un unique triplet $(O, D, K) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^{+*}) \times \mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = ODK$. Ainsi, l'équation calculée équivaut à l'équation suivante

$$ODKX = Y \Longleftrightarrow KX = D^{-1}O^{-1}Y$$

Or $O^{-1} = O^{T}$ puisque O est orthogonale. Ce qui termine la preuve. □

La seconde application est un résultat trivial puisqu'il s'agit du calcul du déterminant dont nous connaîssons parfaitement les propriétés.

Corollaire 2. *Soit $\mathscr{G} = \{g_i\}_{i=1}^{n}$ une famille de vecteurs. Si $\mathscr{G}$ est une base alors son déterminant vaut*

$$\det \mathscr{G} = \pm \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|$$

avec $u_1, \ldots, u_n$ les vecteurs orthogonaux obtenus de $\mathscr{G}$ par le procédé de Gram-Schmidt.

Démonstration. En représentant $\mathscr{G}$ sous sa forme matricielle dans la base canonique, nous obtenons une matrice inversible, que nous noterons G, décomposable au sens d'Iwasawa. Ainsi, il existe un unique triplet $(O,D,K) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^{+*}) \times \mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ tel que $G = ODK$. En appliquant les propriétés du déterminant et celles des matrices orthogonales, nous obtenons successivement

$$\det \mathscr{G} = \det G = \det O \det D \det K = \det O \det D = \det O \prod_{i=1}^{n} \|u_i\| = \pm \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|$$

avec $u_1, \dots, u_n$ les vecteurs orthogonaux obtenus de $\mathscr{G}$ par le procédé de Gram-Schmidt. D'où le résultat. $\square$

Notre dernière application est une application dans le domaine de l'arithmétique. Précisément, sur la résolution d'un système de congruence qui peut être vu comme le célèbre théorème des restes chinois.

Corollaire 3. *Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs vérifiant*

1. $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ bu + dv = 1$ *(identité de Bézout pour les nombres premiers)*
2. $c - a \neq 0$

alors l'entier

$$x \equiv (adv + cbu) \mod bd$$

est solution du système de congruence

$$\begin{cases} x & \equiv a \mod b \\ x & \equiv c \mod d \end{cases}$$

Démonstration. Le système de congruence équivaut à l'équation matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kb \\ k'd \end{pmatrix}$$

avec $(k,k') \in \mathbb{Z}^2$. Ensuite, en appliquant le corollaire 1, nous obtenons le système échelonné suivant.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-a-c}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{kb+k'd}{2} \\ \frac{kb-k'd}{c-a} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{kb+k'b+a+c}{2} \\ 1 & = \frac{kb-k'd}{c-a} \end{cases}$$

Prenons la seconde équation et multipliant-la par u et par v en deux temps. Cela donne respectivement deux équations

$$u = \frac{u(kb - k'd)}{c-a} \Longrightarrow kbu = u(c-a) + k'du$$

$$v = \frac{v(kb - k'd)}{c-a} \Longrightarrow k'dv = kbv - v(c-a)$$

Comme $bu + dv = 1$ alors $bu = 1 - dv$ et $dv = 1 - bu$. Ensuite, en utilisant ces expressions dans les équations précédentes nous obtenons

$$k = u(c-a) + d(k'u + kv) \text{ et } k' = -v(c-a) + b(kv + k'u)$$

En remplaçant ce qui a été obtenu dans la première équation du système nous obtenons

$$x = \frac{(u(c-a)+d(k'u+kv))\,b+(-v(c-a)+b(k'u+kv))\,d+a+c}{2}$$

Après simplification nous obtenons

$$2x = (bu-vd)(c-a)+a+c+2bd(k'u+kv)$$

De plus, l'entier $(bu-vd)(c-a)+a+c$ est paire puisqu'un calcul direct permet d'établir

$$(bu-vd)(c-a)+a+c = 2avd+2cbu$$

Finalement, nous déduisons que

$$x \equiv (avd+cbu) \mod bd$$

$\square$

Chapitre 3

Généralisation de la décomposition d'Iwasawa

Ce dernier chapitre est un survol de la décomposition d'Iwasawa pour les groupes de Lie. Il s'appuie sur des livres de Terras dans [4] et [5], de Faraut [1] et de Warner [6].

3.1 Rudiments de la théorie des algèbres et des groupes de Lie

Définition 2 (Groupe de Lie). *On appelle groupe de Lie un ensemble G muni d'une structure de variété telle que*

1. *l'application $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g\,h$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.*
2. *l'application $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

Nous dirons qu'un tel groupe est un *groupe linéaire* si $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Nous dirons qu'un groupe est un *groupe de Lie linéaire* si c'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, nous pouvons associer un groupe de Lie linéaire G avec l'ensemble

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tM) \in G\}$$

Un tel ensemble tient une terminologie particulière qui est la suivante.

Définition 3 (Algèbre de Lie). *On appelle algèbre de Lie un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni de l'application $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ qui vérifie*

1. $\forall x \in \mathfrak{g},\ [x, x] = 0$
2. $\forall (x, y) \in \mathfrak{g}^2,\ [x, y] = -[y, x]$
3. $\forall (x, y, z) \in \mathfrak{g}^3,\ [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ *(identité de Jacobi)*

On dit que $\mathfrak{g}$ est simple si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal non trivial et si $\mathfrak{g}$ n'est pas commutative.
On dit que $\mathfrak{g}$ est semi-simple si le seul idéal commutatif de $\mathfrak{g}$ est $\{0\}$.

L'application $[.,.]$ est appelée le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$. Dans le cas des matrices carrées, elle s'appelle le *commutateur* et est définie comme suit

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ [A, B] = AB - BA$$

Nous pouvons associer une algèbre de Lie avec un groupe de Lie.

Définition 4 (Algèbre de Lie d'un groupe de Lie). *On dit que* $\mathfrak{h}$ *est l'algèbre de Lie de* H *si*

- *H est un groupe de Lie linéaire.*
- $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$.

Si tel est le cas, on dit aussi que $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 2. *On peut citer les algèbres de Lie* $\mathfrak{g}$ *associée à leur groupe de Lie* G *dans le tableau suivant.*

G	$\mathfrak{g}$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}M = 0\}$

3.2 Décompositions des groupes de Lie

La décomposition des groupes de Lie est très utile pour analyser ces groupes. En effet, cette démarche permet

- d'étudier la structure des groupes de Lie et les objets auxquels ils peuvent être associés.
- d'analyser les topologies algébriques de ces groupes et les définir avec des groupes quotients.
- de « décomposer des phénomènes » en terme plus simple.

La décomposition classique d'Iwasawa, prouvée par Iwasawa dans [2], s'énonce comme suit.

Théorème 3 (Iwasawa). *Soit* G *un groupe de Lie d'algèbre de Lie semi-simple* $\mathfrak{g}$. *Alors il existe* K *un sous-groupe compact maximal,* A *un groupe abélien et* N *un groupe nilpotent telles que* G *soit isomorphe à* $K \times A \times N$ *; i.e.*

$$G \simeq K \times A \times N$$

Exemple 3. *On peut citer* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *avec*

- $K = \mathrm{SO}_2$
- $A = \left\{ \tau_r := \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} : r > 0 \right\}$
- $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

Ce résultat s'énoncant avec beaucoup de simplicité comprend, cependant, une démonstration très délicate puisqu'elle demande des outils qui dépassent le programme de la licence actuel. C'est pourquoi, nous ne l'entamerons pas ici mais nous discuterons plutôt de son importance et de son impact.

D'abord, cette décomposition montre qu'il existe un unique difféomorphisme analytique de la variété $K \times A \times N$ au groupe de Lie G. L'existence, et surtout l'unicité, d'une telle application est très efficace car elle permet de faciliter l'analyse de ces groupes dans leur structure. Aussi, comme les groupes de Lie, c'est une décomposition qui est très forte car nous pouvons obtenir une décomposition analogue dans le cas des algèbres de Lie semi-simple auxquelles elles sont liées mais, cette fois-ci, sous la forme d'une somme directe. Cette décomposition a fait ses preuves. En effet, elle permit de démontrer le *5ème problème de Hilbert* qui est jugé comme un des problèmes mathématiques les plus difficiles de notre époque.

Par ailleurs, il existe plusieurs manières de décomposer un groupe de Lie ou une algèbre de Lie. Nous pouvons citer la décomposition de Bruhat, la décomposition LU ou encore la décomposition de Jordan. Celle de Cartan est la décomposition qui se démarque puisqu'elle peut être vue comme une décomposition voisine à celle d'Iwasawa.

Théorème 4 (Cartan). *Tout algèbre de Lie semi-simple peut s'écrire comme la somme des espaces propres d'un automorphisme θ sur cet algèbre (involution de Cartan).*

Cette décomposition a la particularité de généraliser la décomposition polaire ou celle en valeur singulière dans le cas des matrices.

3.3 Étude des espaces symétriques

Notons $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des matrices à coefficient dans $\mathbb{R}$ symétriques et définie-positives ; i.e.

$$\mathscr{P}_n = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : M^T = M \text{ et } M \text{ définie-positive} \right\}$$

Définition 5. *On appelle espace symétrique une variété Riemannienne admettant en tout point une symétrie centrale.*

Exemple 4. *$\mathscr{P}_n$ est un espace symétrique.*

L'espace $\mathscr{P}_n$ est un espace qui a la particularité d'être un espace symétrique correspondant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ puisque, dans [5], il peut être identifié comme le groupe quotient suivant

$$\mathscr{P}_n \simeq \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

La décomposition d'Iwasawa apparaît à travers le calcul d'intégrale sur cet espace. En effet, pour une fonction f mesurable nous avons, par [5], la formule suivante

$$\int_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathscr{O}_n(\mathbb{R})} \int_{\mathscr{D}_n(\mathbb{R}^{+*})} \int_{\mathscr{U}_n(\mathbb{R})} f(ODK)\mathrm{d}K\,\mathrm{d}D\mathrm{d}O$$

où la mesure utilisée est la mesure de Haar.

Le demi-plan de Poincaré est un ensemble qui permet d'illustrer tous ces principes puisqu'il est l'espace symétrique du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; qui est l'ensemble des matrices de taille 2×2 de déterminant 1. De surcroît, il s'agira aussi d'avoir une interprétation géométrique de cette décomposition.

Définition 6 (Demi-plan de Poincaré). *On appelle demi-plan de Poincaré l'ensemble H définie par*

$$H = \left\{ x + \mathrm{i}y : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$$

avec $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$*, qui est muni de la métrique* $\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$ *avec* $\mathrm{d}s$ *la longueur de l'arc*

Définition 7 (Géodesique). *On appelle géodésique les demi-droites et les demi-cercles (au sens euclidien) sur H orthogonales à l'axe des abscisses.*

Un tel espace a la particularité de ne pas respecter le 5ème postulat d'Euclide de la géométrie euclidienne. En effet, comme le montre la figure suivante, il existe une infinité de géodésique pouvant couper un point z de H telles qu'une autre géodésique soit parallèle à ces géodésiques.

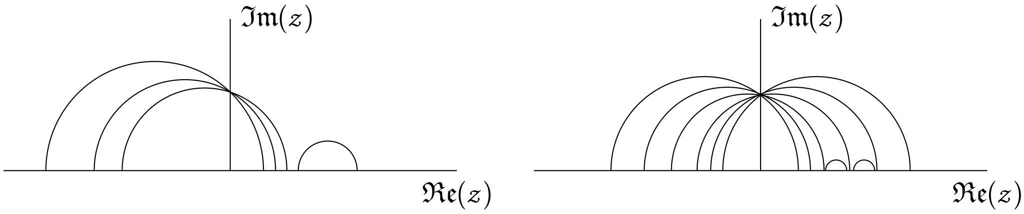

FIGURE 3.1 – Illustration de l'échec du 5ème postulat d'Euclide sur H.

Ce qui signifie que ce qui se fait en géométrique euclidienne ne peut pas se faire sur H. Par ailleurs, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur H. Aussi, la métrique $\mathrm{d}s^2$ est invariante sous l'action de $G \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en $z \in H$. Soit $G \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, définissons

$$G(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{3.1}$$

Cette application préserve l'angle de H sur H et la métrique $\mathrm{d}s^2$ est invariante sous l'action (3.1) de $G \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Au delà, comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement, nous pouvons avoir une description de l'action en terme de la décomposition d'Iwasawa. Cette dernière utilise la notion de groupe d'isotropie.

Définition 8 (Groupe d'isotropie). *On appelle groupe d'isotropie de $w \in H$ l'ensemble*

$$G_w = \{G \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : G(w) = w\}$$

Le groupe G_{i}, avec $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, est un exemple particulier et est le groupe de matrice de rotation $-\theta$ avec $\theta > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $d > 0$ et $G \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, par la décomposition d'Iwasawa de G et en évaluant (3.1) en i nous obtenons

$$G(\mathrm{i}) = ODK(\mathrm{i}) = OD(\mathrm{i}) = y\mathrm{i} + x = x + y\mathrm{i}$$

avec $y = d^2$, $O(x)(z) = z + x$ et $D(\mathrm{i}) = y\mathrm{i}$.

Bibliographie

[1] Jacques Faraut. Analyse sur les groupes de lie. *Calvage et Mounet, Paris*, 2006.

[2] Kenkichi Iwasawa. On some types of topological groups. *Annals of Mathematics*, pages 507–558, 1949.

[3] Serge Lang. *Undergraduate algebra*. Springer Science & Business Media, 2005.

[4] Audrey Terras. *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications I*. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] Audrey Terras. *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications II*. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 2013.