Tutorat d'accompagnement

1.1 Continuité et dérivabilité

Exercice 1. *Montrer chaque équivalence.*

1. $3 - x + x^3 \sim_0 3$
2. $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sim_0 \frac{1}{x^2}$
3. $\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim_{+\infty} \sqrt{x}$
4. $\sqrt[3]{x+1} \sim_0 1 + \frac{x}{3}$

Exercice 2. *Montrer que* $\cosh(x) \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2} \sim_{+\infty} \sinh(x)$ *et déduire la propriété suivante*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ x^\alpha = o_{+\infty}(\cosh(x)) = o_{+\infty}(\sinh(x))$$

Exercice 3. *Calculer* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ *et déduire un développement à l'ordre* 2 *en* 0 *de* cos.
A partir des faits précédents, calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\tan(2x)}$$

Exercice 4. *Donner un développement à l'ordre* 2 *en* 0 *de* $x \mapsto \sin(\sin(x))$ *et* $x \mapsto \exp(\exp(x))$.

Exercice 5. *Montrer que chaque fonction est dérivable au point indiqué.*

1. $x \mapsto \ln(x)$ en 1.
2. $x \mapsto \ln(x) + 2$ en 3.
3. $x \mapsto \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$ en 2.
4. $x \mapsto x^3 - 6x^2 + 25$ en 5.

Exercice 6. *Déterminer l'équation de la tangente de chaque fonction au point indiqué.*

1. $x \mapsto 2 - 2x^2$ en 1.
2. $x \mapsto x^3 - x^2$ en -4.

Exercice 7. *Donner l'expression de la tangente de* $x \mapsto (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ *en* $(-1, 0)$, $(2, 3)$ *et* $(3, 0)$.

Exercice 8. *Pour chaque fonction, donner sa réciproque et la dérivée de cette réciproque.*

1. $x \mapsto x + \ln(x)$
2. $x \mapsto x + e^x$
3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Exercice 9 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *un entier,* I *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction de classe* $\mathscr{C}^n$ *en un point* $a \in I$. *On note* $P(n)$ *la propriété définie par*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a((x-a)^{n+1})$$

1. Démontrer que $P(1)$ est vraie.

2. En supposant que $P(n-1)$ est vraie, démontrer que $P(n)$ est vraie.
3. A partir des questions précédentes, rédiger la preuve du raisonnement utilisée pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier quelconque n non nul.

Exercice 10. *Déterminer l'expression de tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ vérifiant*
- $P(0) = P'(0) = 1$
- $P''(0) = 0$
- $P^{(3)}(0) = 12$
- $P^{(4)}(0) = 16$

2.1 Suite de nombre réelle

Exercice 1. *Donner la limite de chaque suite.*

1. $\frac{1}{n^3+n^2}$
2. $3^n - 2^n$
3. $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
4. $\sqrt[n]{n}$
5. $\prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2}$
6. $\lim_{N\to+\infty} u_N/n$ avec $u_n = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{N+1}$

Exercice 2 (application du lemme des gendarmes)**.** *Donner la limite de chaque suite.*

1. $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$
2. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots$
3. u_n/n avec $u_n = \lfloor n \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \cdots + (-1)^{k+1} \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + \cdots$

Exercice 3 (application de la limite monotone)**.** *Donner la limite de chaque suite.*

1. $\frac{2^n}{n!}$
2. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$
3. $\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$

Exercice 4 (Itérée des sinus)**.** *On définit une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme fixé $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Montrer que $u_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{3}{n}}$

3.1 Intégration

Exercice 1. *Calculer chaque intégrale.*

1. $\int_1^2 x^4 \mathrm{d}x$
2. $\int_0^2 x^{-4} \mathrm{d}x$
3. $\int_2^6 x^{-1} \mathrm{d}x$
4. $\int_{-2}^2 x\cos(x)\mathrm{d}x$
5. $\int_9^{10} \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\mathrm{d}x$

Exercice 2 (Intégrale de Wallis)**.** *On définit la suite*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x$$

Établir la formule par récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

Exercice 3 (IPP à l'ordre n). *Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$, deux réels a, b vérifiant $a < b$ et deux fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ en tout point de $]a, b[$. On note $P(n)$ la propriété définie par*

$$\int_a^b f(x)g^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left[f^{(k)}(x)g^{(n-k-1)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)g(x)\mathrm{d}x$$

1. *Montrer que $P(1)$ est vraie.*
2. *Démontrer que $P(n)$ est vraie en supposant que $P(n-1)$ est vraie.*
3. *A partir des questions précédentes, rédiger la preuve du raisonnement utilisée pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier quelconque n non nul.*